ARQUITECNO

| ARTÍCULOS |

ISSN: 0328-0896 ISSN-e: 2668-3988
Periodicidad: Semestral núm. 21, 2023
DOI: https://doi.org/10.30972/arq.0216693

La curva catenaria como forma natural y su emergencia en la arquitectura

The catenary curve as a natural form and its emergence in architecture

Gescovich, Gabriela
gabriela.gescovich@comunidad.unne.edu.ar
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

Vedoya, Daniel Edgardo
daniel.vedoya@comunidad.unne.edu.ar
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

Recepción: 02/02/2023
Aceptación: 31/03/2023

Resumen

El presente artículo constituye una sintética investigación sobre la curva catenaria. Se parte de la definición formal y deducción matemática correspondiente a su ecuación, siguiendo con sus manifestaciones como forma natural en seres y fenómenos de la naturaleza, destacando su propiedad fundamental relacionada con la estabilidad de la curva invertida. Finalmente se retoma algunas de las obras de Rober Gaudí para resaltar su importancia en los procesos de diseño arquitectónico y calculo estructural.

Palabras clave. catenaria, naturaleza, arquitectura.

Abstract

This article constitutes a synthetic investigation on the catenary curve. It starts from the formal definition and mathematical deduction corresponding to its equation, continuing with its manifestations as a natural form in beings and phenomena of nature, highlighting its fundamental property related to the stability of the inverted curve. Finally, some of the works of Rober Gaudí are taken up again to highlight their importance in the processes of architectural design and structural calculation.

Keywords: catenary, nature, architecture.

Introducción

En este artículo estudiaremos un tipo de curva muy peculiar, la catenaria. Comenzaremos definiendo esta curva desde un punto de vista matemático-físico, posteriormente consideraremos cómo se manifiesta en la naturaleza, presentando algunas de sus magníficas propiedades relacionadas con la estabilidad de la curva invertida, finalmente analizaremos su importancia en la arquitectura, retomando algunas construcciones del reconocido arquitecto catalán Robert Gaudí.

Definición y ecuación

La Catenaria es la forma que adopta una cuerda o cadena cuando es suspendida en el aire desde dos puntos fijos y sólo soporta su propio peso (Gomez Serrano, 2002; Vedoya y Prat 2009) ver figura 1. Originalmente Galileo Galilei afirmó que esta curva se trataba de una parábola, pero Christiaan Huygens demostró con solo 17 años que la forma geométrica no se ajustaba a una parábola, sino a otro tipo de curva, aunque no supo obtener la ecuación de la catenaria, más adelante en el año 1691 la ecuación finalmente fue encontrada por el propio Huygens, Johann Bernoulli y Gottfried Leibniz.

Figura 1. Catenaria
Fuente http://apuntes-dematematicas.blogspot.com/2014/01/es-dios-un-matematico-mario-livio-2009_2161.htm

A continuación, se presenta la deducción matemática correspondiente a su ecuación, para ello recurrimos a los aportes del autor Fernández Jiménez (2020) de la Universidad de Oxford, quien detalla una de las deducciones más completas y sencillas según nuestros registros bibliográficos. Aclaramos al lector que para su entendimiento es necesario poseer conocimientos de fuerzas tensoriales y calculo infinitesimal.
El autor parte de una cuerda ideal perfectamente flexible e indeformable, con masa distribuida de manera uniforme a lo largo de su longitud, suspendida en el aire por sus extremos y sometida solamente a la fuerza de la gravedad.
Luego se considera solo una parte de la cuerda, el tramo desde el punto A = (0, h), el vértice de la cadena colgante (punto de la cuerda más próximo al suelo), hasta B, un punto variable a la derecha A con abscisa x. Este trozo de la cuerda tiene longitud s(x) y sobre él actúan varias fuerzas. Siguiendo el esquema de fuerzas (véase la figura 2) se plantea varias ecuaciones mediante las cuales se obtendrá una expresión analítica para la catenaria.

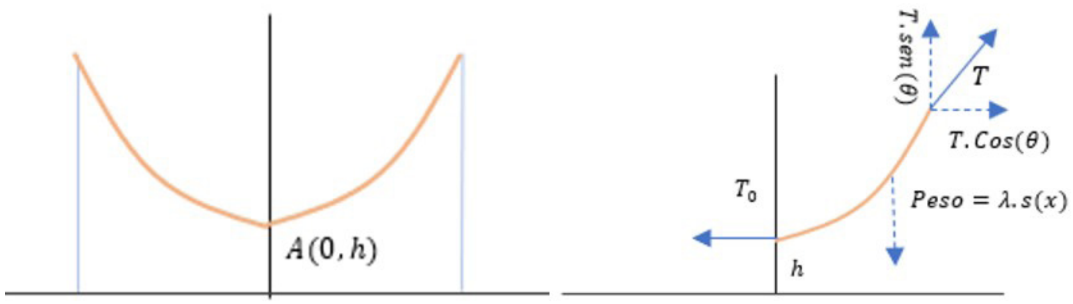


Figura 2. Esquema de fuerzas de la catenaria
Gráfico de elaboración propia

Sean los siguientes datos:
· τ la fuerza tensorial que afecta a la cuerda en el punto B;
·τo la fuerza tensorial que afecta a la cuerda en el punto A;
· θ el ángulo formado por la fuerza T y la horizontal;
· λ la densidad lineal de la catenaria;
Como ya hemos explicado antes, tanto en el eje horizontal como en el vertical mantenemos un equilibrio de las fuerzas. Se extraen las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = T\cos(\theta) - T_0 = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_y = T\,\mathrm{sen}(\theta) - \lambda \cdot s(x) = 0. \tag{2}$$

A partir de las igualdades (1) y (2), podemos deducir las ecuaciones que gobiernan a la catenaria: Aprovechamos que la pendiente puede expresarse como dx/dy y además es la tangente del ángulo 0. Esta relación, junto a (3), nos permite obtener la siguiente igualdad:

Despejando s(x)

$$\begin{aligned} T \cdot \cos(\theta) &= T_0, \\ T \cdot \mathrm{sen}(\theta) &= \lambda \cdot s(x). \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) = \frac{\lambda \cdot s(x)}{T_0}.$$

$$s(x) = \frac{d_y}{d_x} \cdot \frac{T_0}{\lambda} \tag{4}$$

Por otra parte, sabemos que S, la longitud de arco, satisface la igualdad

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{5}$$

Entonces, derivando s(x) con respecto al parámetro x tanto en (4) como en (5), deducimos la expresión:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{T_0}{\lambda} \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

La cual constituye una ecuación diferencial con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{\lambda}{T_0}\sqrt{1+y'(x)^2}, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = h. \end{cases}$$

Cuya solución es la ecuación de la catenaria buscada

$$\boxed{y = \frac{T_0}{\lambda} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda}{T_0} \cdot x\right) - \frac{T_0}{\lambda} + h.}$$

como hemos puesto $= \frac{T_0}{\lambda} = h$ podemos sustituir esta fórmula por

$$y(x) = h.\,cosh\left(\frac{x}{h}\right)$$

Diferencias y similitudes de la catenaria y parábola

Para desarrollar esta sección analizaremos sus similitudes y diferencias, atendiendo a tres elementos: Ecuación, forma de la gráfica, cargas y construcción de puentes.

Ecuación

En el apartado anterior se mencionó que originalmente, algunos matemáticos, entre ellos Galileo, habían confundido la a catenaria con una parábola. Ahora, al haber encontrado una expresión analítica, la comparación entre dichas curvas es más sencilla y, una vez obtenida una fórmula explícita para la catenaria, es interesante preguntarse, si desde el punto de vista analítico es posible identificar algún tipo de relación entre sus correspondientes ecuaciones. Resulta que Galileo no desatinó demasiado al identificar a la catenaria con la parábola, ya que, desarrollando la ecuación obtenida en serie de Maclaurin hasta la derivada de cuarto orden se obtiene:

$$y(x) = h + \frac{x^2}{2h} + O(x^4)$$

Es decir que el cosh(x) (coseno hiperbólico) es igual a la ecuación de una parábola más un término de cuarto orden. Siendo la ecuacion de la parabola $g(x)=ax^2+bx+c$.
Esto es la razón de que ambas curvas sean tan parecidas gráficamente entorno al cero (Sierra Fernández ,2019).

Forma Gráfica

En cuanto a sus representaciones gráficas, como se mencionó anteriormente ambas curvas tienen un comportamiento similar entorno al 0, no obstante, al aumentar el valor de la variable x comienzan a separarse hasta interceptarse nuevamente. Además, ambas curvas son continuas. tienen un eje de simetría y vértice.

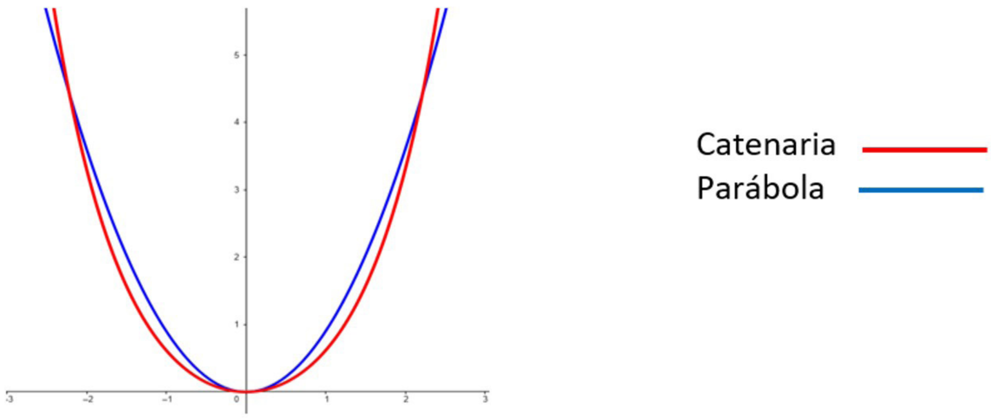
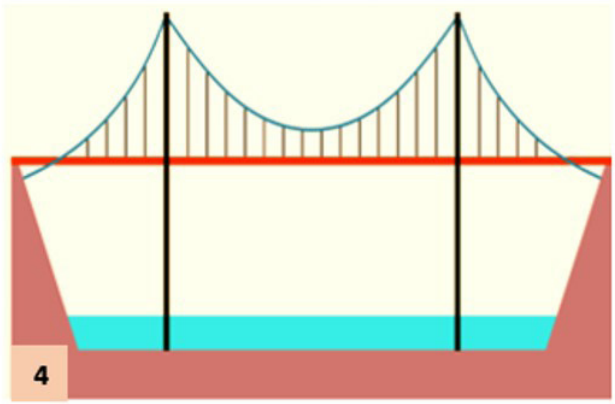
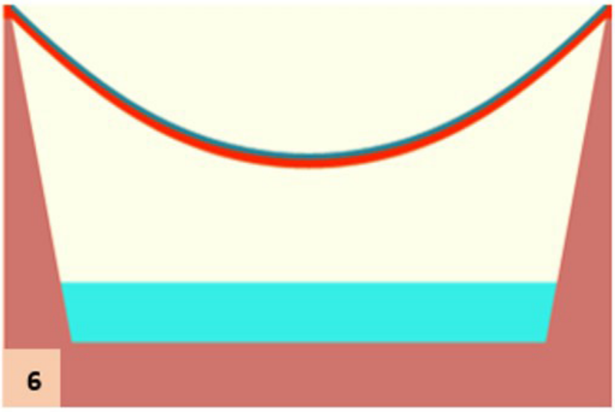


Figura 3. Catenaria y Parábola
Fuente: https://www.geogebra.org/m/cwub2bRZ

Cargas y Construcción de Puentes

Cuando una curva está sometida a una carga uniforme por unidad de proyección horizontal, dicha curva adquiere la forma de una parábola si se desprecia su peso propio respecto al de la carga que debe soportar. Este caso se presenta, en la práctica, en el cálculo de puentes colgantes, en los que el peso del tablero es mucho mayor que el del cable que lo sustenta (figura 4). Como ejemplo se menciona el puente Golden Gate, uno de los puentes colgantes más largos y altos del mundo y sobre todo, el símbolo más querido y representativo de la ciudad de San Francisco (Figura 5).
La catenaria en cambio es una curva sometida solo a su peso por unidad de longitud de la curva, y representa el perfil de un puente de suspensión simple, o el cable de un puente colgante de plataforma suspendida en el que su plataforma y sus tirantes tienen una masa insignificante en comparación con la del cable (Figura 6). Como ejemplo se presenta el puente colgante de Capilano en el Distrito de Vancouver Norte, Canadá. El puente actual tiene una longitud de 140 metros, y se encuentra suspendido a 70 metros de altura sobre el río Capilano.
Es un sitio turístico muy importante de Vancouver, que atrae alrededor de 800 000 visitantes al año (Figura 7).
En el caso de los puentes colgantes. Cuando se está construyendo la estructura y los cables principales están sujetos a las torres, la curva es una catenaria, pero cuando los cables se sujetan al tablero con péndolas, deja de ser una catenaria para convertirse en una parábola.





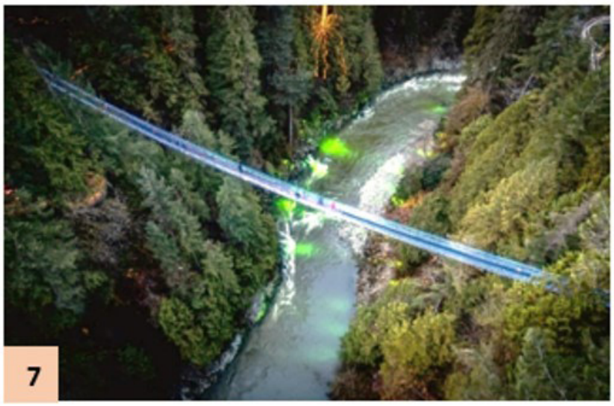


Figura 4 y 5. Figura 6 y 7. Puente Colgante y Puente Golden Gate. Puente De Suspensión Simple y Puente de Capilano. Distrito de Vancouver Norte, Canadá
Fuente https://expansion.mx/tendencias/2018/10/21/los-10-secretos-mejor-guardados-del-golden-gate
Fuente https://expansion.mx/tendencias/2018/10/21/los-10-secretos-mejor-guardados-del-golden-gate

La catenaria en la naturaleza

La curva catenaria se presenta en la naturaleza, la podemos encontrar en todo objeto colgante que se sustente por dos puntos. El primer ejemplo y quizá el más evidente es el de una liana en plena selva (Figura 8). Estos organismos vegetales, luego de alcanzar cierto tamaño, necesitan apoyarse en un soporte externo para continuar su crecimiento, este soporte generalmente es un árbol. Algunas especies tienen estructuras que las ayudan a “agarrarse” de sus soportes, pueden ser zarcillos y espinas, o bien ramas largas que las ayudarán a sostenerse (Mayoral Loera, 2022).
Las telas de araña también están compuestas por diferentes hilos y elementos, los cuales adoptan una forma de curva catenaria (Figura 9).
Dichas estructuras son capaces de detener presas aéreas cuyas masas son muy superiores a la de ésta. La forma de las telas y la disposición de los diferentes hilos y materiales dentro de la estructura permiten soportar diversos estados de carga tanto estática (peso propio del material, de la araña y de los sacos ovígeros) como dinámica (impacto de presas y de otros agentes ecológicos) (Alejandro Trujillo, 2017).
Siguiendo ahora con las hormigas, existe una especie denominada hormigas guerreras, que son capaces de construir puentes con sus cuerpos para transportar cargas importantes.
En la imagen (Figura 10) se muestra un puente construido para saquear un panal de avispas. Las imágenes fueron tomadas por un ingeniero llamado Francisco Boni quien quedo asombrado por la destreza de estos diminutos insectos, explicando en sus redes cómo la estructura tipo puente benefició a la maniobra: "Para las hormigas es más efectivo seguir el rastro por un puente que baja y luego sube que en una caminata al revés, de cabeza al suelo. Impresionante el nivel de inteligencia de enjambre y cálculo colectivo para formar ese puente" Señalo el ingeniero en sus redes.
Si nos remitimos 65 millones de años atrás a la era de los feroces dinosaurios que habitaron la tierra, y observamos los dibujos de estos, posiblemente notemos una curvatura en sus espaldas. Esta particular formación de la espina dorsal era justamente lo que les permitía soportar su enorme peso y su forma se aproximaba a una curva catenaria invertida (Figura 11).

Figura 8, Figura 9, Figura 10, Figura 11
Tela Araña. Liana de la selva. Puente de Hormigas con forma de catenaria. Espina dorsal de un dinosaurio en forma de la curva catenaria invertida
Fuente: https://www.alamy.es/imagenes/lianas.html?sortBy=relevant Fuente: https://tn.com.ar/internacional/el-increible-metodo-que-utilizaron-una-hormigas-legionarias-para-saquear-un-panal-de-avispas_888392
Fuente: https://es.wiktionary.org/wiki/estegosaurio (Error 1: El enlace externo https://tn.com.ar/internacional/el-increible-metodo-que-utilizaron-una-hormigas-legionarias-para-saquear-un-panal-de-avispas_888392 debe ser una URL) (Error 2: La URL https://tn.com.ar/internacional/el-increible-metodo-que-utilizaron-una-hormigas-legionarias-para-saquear-un-panal-de-avispas_888392 no esta bien escrita)

Aplicación de la curva catenaria al diseño de arcos

Podríamos preguntarnos qué relación guarda la curva catenaria con el diseño de los arcos. La explicación se encuentra en el hecho de que, si consideramos un arco que tenga la misma geometría que la catenaria invertida, este arco se encontrará sometido únicamente a compresión (Fernández Jiménez, 2020). Análogamente a lo que ocurre con la cadena colgante, la cual distribuye de manera homogénea su peso, el arco que adopta la forma de una catenaria invertida reparte la compresión del peso que soporta de forma totalmente homogénea a lo largo de su estructura. Por ello, esta forma es ideal para el arco sometido únicamente a su propio peso, ya que no son necesarios elementos externos para reforzar la estructura. Un arco catenario o arco de catenaria es un tipo de arco cuyo perfil coincide con el de una curva catenaria invertida

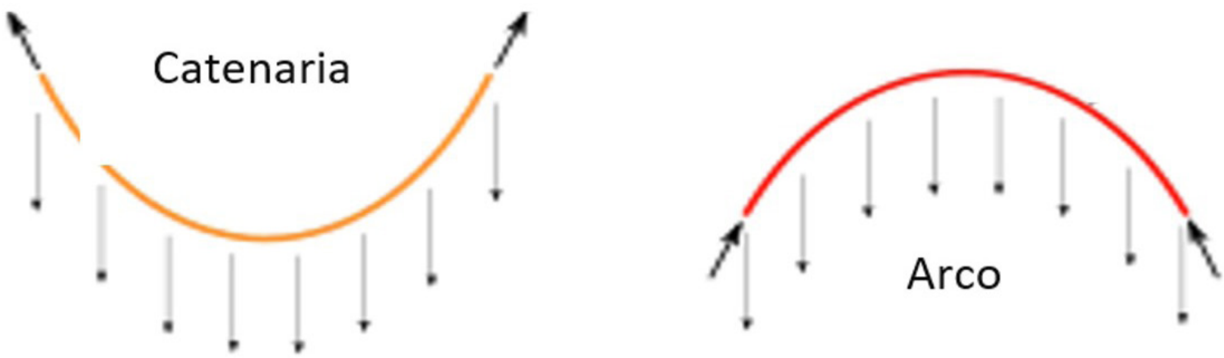


Figura 12. Catenaria y Arco Catenario. Elaboración propia

A partir del Arco catenario es posible construir otros arcos funiculares que tienen también óptimas características constructivas y que se pueden obtener con facilidad reproduciendo los efectos de cargas puntuales sobre una curva catenaria.
La elección de las cargas puntuales apropiadas permite definir mejor la geometría y sección de los arcos. (Gómez Serrano, 2002)
Para la obtención de este arco se debe fijar un cordel o cadena fija permitiendo su arqueamiento, luego se disponen cargas puntuales hasta conseguir la forma deseada. Al final, invertimos la curva y la usamos para usos arquitectónicos. Además, para arcos catenarios de igual longitud, se cumple la norma de que, a mayor altura, más pequeño es el empuje horizontal en los puntos de arranque, con lo que se pueden obtener grandes alturas con mínimos empujes laterales (Figura 13)

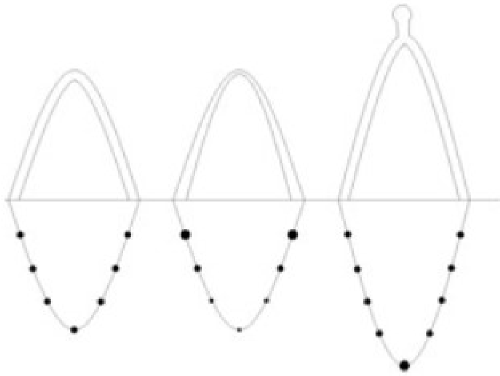


Figura 13. Arcos Funiculares
Fuente: https://wiki.ead.pucv.cl/ESTUDIO_Y_APLICACI%C3%93N_DE_LA_CATENARIA

Esta idea de invertir la curva catenaria surgió mucho antes de conocer su formulación matemática. Probablemente fue Leonardo da Vinci, a finales del siglo XV, el primero en comprender esta vinculación entre catenarias y arcos. Entre sus manuscritos pueden encontrarse cadenas colgando y geniales anotaciones como la de que "el arco trabaja de forma análoga puesto del derecho que del revés”, lo que demuestra que conocía que la catenaria debía ser el antifunicular de las fuerzas sobre las dovelas del arco. Pero hubo que esperar casi dos siglos para que Hooke (1676), plasmase claramente esta idea, al afirmar que “del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido se sostendrá el arco rígido”.
Aunque Hooke no fue quien resolvió el problema matemático, algunos autores defienden que sí resolvió el problema técnico, al comprender que un arco funciona como un cable invertido. Años después, e Gregory (1697) añadió un interesante matiz al afirmar que "si el resto de los arcos se sostienen es porque hay una catenaria en su interior".

Las magníficas construcciones de Gaudi

Antonio Gaudí fue un arquitecto español, máximo representante del modernismo catalán. Dotado con un sentido innato de la geometría y el volumen, no desconocía las propiedades de la curva catenaria y en vez de emplear arcos circulares (de medio punto, apuntados, carpaneles, etc.) utilizó arcos de formas parabólicos o catenarias, formas nada habituales dentro de la tradición arquitectónica occidental (Huerta 2013). Entendía que las construcciones debían surgir desde la estabilidad y no al revés, desde el inicio ya había un interés por el diseño de una estructura estable, y no una mera comprobación de estabilidad a posteriori. Intentando eliminar toda clase de accesorios pensados simplemente para sostener la estructura. Por ello la catenaria le resultaba tan atractiva, pues elimina las fuerzas laterales y distribuye la compresión de forma totalmente homogénea, permitiendo crear estructuras elevadas, elegantes y estables (Alsina y Gómez Serrano 2002). Para Gaudí “la catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad para la construcción entera. La función autoestable de la catenaria evita contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguanta sin raros accesorios ortopédicos” (Giralt-Miracle , 2002). A continuación, se mencionarán algunas de sus obras arquitectónicas en las que aparecen los arcos con curvatura de catenarias invertidas.

Casa Milà

La Casa Milà, llamada popularmente La Pedrera cantera en catalán), es un edificio modernista construido entre los años 1906 y 1910 en el distrito del Ensanche de Barcelona, por encargo de Pere Milà y Roser Segimon (Figura 14).
La construcción es un reflejo de la plenitud artística de Gaudí, pertenece a su etapa naturalista, periodo en que el arquitecto perfecciona su estilo, inspirándose en las formas armónicas de la naturaleza, poniendo en práctica una serie de nuevas soluciones estructurales originadas en los profundos análisis efectuados de la geometría reglada. Si bien cada espacio y elemento de la casa tiene su particular encanto, en este apartado nos centraremos en el desván. Dicho sector se construyo encima del forjado de la última planta de viviendas, por lo que los arcos tienen que soportar tan solo su propio peso, siendo la geometría óptima en este caso una catenaria. El arquitecto recurrió a 270 arcos catenarios de ladrillo los cuales crean una estructura autosustentante que no necesita columnas ni muros de carga. Estos arcos se unen en el techo en una especie de espina dorsal que recuerda el esqueleto de algún animal o la estructura de un barco dispuesta al revés (Figura 15 y 16).

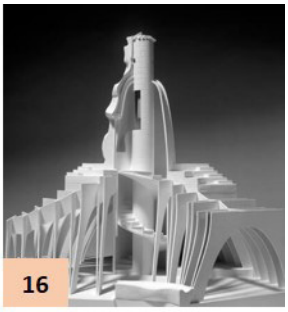


Figura 14, Figura 15, Figura 16
Casa Milà. Desván conformado por una estructura de arcos catenarios. Maqueta de la estructura con arcos catenarios
Fuente: https://www.lapedrera.com/es/la-pedrera
Fuente: https://www.bcncatfilmcommission.com/es/location/la-pedrera-casa-mila
Fuente: https://www.lapedrera.com/es/la-pedrera/arquitectura-gaudi (Error 3: El enlace externo https://www.lapedrera.com/es/la-pedrera debe ser una URL) (Error 4: La URL https://www.lapedrera.com/es/la-pedrera no esta bien escrita) (Error 5: El enlace externo https://www.bcncatfilmcommission.com/es/location/la-pedrera-casa-mila   debe ser una URL) (Error 6: La URL https://www.bcncatfilmcommission.com/es/location/la-pedrera-casa-mila no esta bien escrita)

Los modelos de cables colgantes que empleo para el trazado de los arcos eran a escala real, evitando así el complejo ajuste matemático que supondría el cálculo de esta estructura. Apoyándose sobre la pared, colgaba el cable de dos puntos y ajustaba la geometría manteniendo la distancia horizontal fija, modificando la cantidad de cable, que soportaba unas cargas proporcionales a las reales, determinando así su altura (Figura 17). Luego invertía la curva obtenida y la reproducía después en ladrillo (Saez Sanches, 2021).

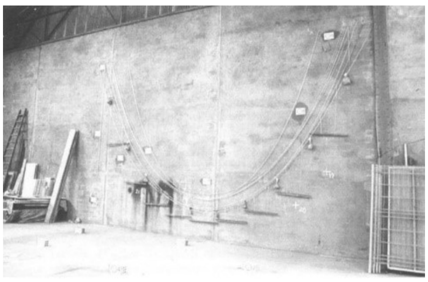


Figura 17. Fotografía de los modelos de cables empleados en el proyecto de los arcos diafragma de la casa Milà
Fuente: http://matematicosoriano.blogspot.com/2021/07/gaudi-y-la-catenaria.html

Quizás el método no sea tan exacto como los cálculos formales, pero simplifica mucho su obtención y la aproximación es suficientemente buena como para cumplir el objetivo buscado. Este fue uno de los avances más importantes de Gaudí.

Casa Batlló

la Casa Batlló no fue un edificio de planta nueva, sino la reforma de un inmueble existente. La transformación tan radical y al mismo tiempo tan innovadora en el uso de colores, formas de fachadas y espacios, lo situaron rápidamente como un icono de la nueva Barcelona.

En particular, y retomando el objetivo de este trabajo, nos centraremos en el ático. Un espacio muy sugerente, evocador y de máxima pureza conformado por una sucesión de arcos catenarios que trasladan al visitante al vientre de un dragón o ballena. A ambos lados de los pasillos encontramos las paredes caladas a modo de branquias filtrando una luz suave que resalta las formas del espacio (Figura 18).

Figura 18 Arcos Catenarios en el ático de la casa Batlló
Fuente: https://www.casabatllo.es/antoni-gaudi/casa-batllo/interior/

Modelos colgantes tridimensionales

El proyecto y cálculo de arcos es un problema que se resuelve en un plano de dos dimensiones. Tras sus investigaciones sobre el proyecto de arcos Gaudí se plantea el problema más general de proyectar bóvedas y finalmente, edificios completos mediante modelos colgantes tridimensionales, algo totalmente novedoso hasta el momento.

El primer modelo tridimensional fue el que hizo para la Iglesia de la Colonia Güell, Esta obra fue importante durante su etapa de experimentación, aunque lamentablemente no pudo finalizarla debido a un problema de financiamiento. Al igual que hizo con los arcos catenarios, Gaudí perfecciona la técnica, y la aplica en modelos tridimensionales, usando saquitos de arena para realizar pequeñas modificaciones sobre el esqueleto colgante de la estructura del proyecto. Cuando la maqueta obtenía la forma deseada, le «daba volumen». Para ello tenía dos estrategias: o tomaba una fotografía y posteriormente pintaba con lápiz sobre ella o bien lo fotografiaba y posteriormente, invertía la fotografía (Huerta 2013) (Figura 19 y 20).

Figura 19, Figura 20.
Maqueta colgante de la Iglesia de la Colonia Güell. Volumen obtenido por inversión del modelo.
https://elisavaee.wordpress.com/2009/10/13/la-maqueta-funicular/
https://es.wikipedia.org/wiki/Cripta_de_la_Colonia_G%C3%BCell#/media/Archivo:Maqueta_Cripta_G%C3%BCell.jpg (Error 7: El enlace externo https://elisavaee.wordpress.com/2009/10/13/la-maqueta-funicular/ debe ser una URL) (Error 8: La URL https://elisavaee.wordpress.com/2009/10/13/la-maqueta-funicular/ no esta bien escrita)

Conclusión

En el presente trabajo hemos estudiado la curva catenaria desde el punto de vista matemático, la analizamos luego en su en su estado natural y finalmente la reconocimos en las obras de Gaudí como elemento estructural y decorativo. Seguramente queda mucho más por descubrir y aclarar sobre esta peculiar curva, pero el conocimiento adquirido hasta aquí, nos bastó   para renovar nuestra admiración por las matemáticas y su dimensión instrumental en los procesos de diseño.

Bibliografía

Alsina, C. y Gómez Serrano, J. (2002): G*audí, geométricamente*. Gac. R. Soc. Mat. Esp. 5 no. 3, 523–539.

Fernández Jiménez A. (2020): La catenaria y su influencia en la arquitectura de Gaudí. La Gaceta de la RSME, Vol. 23 (2020). Universidad de Oxfort.

Giralt-Miracle, D. (2002): *Gaudí. Miscelánea*, Planeta, 2002.*Gómez Serrano, J. (2002): Arcos centenarios. En Giral Miracle,* Gaudí. La búsqueda de la forma (pp.96-104). Barcelona: Lunwerg.

Gregory, D. (1697): Catenaria. Philosophical transactions of the Royal Society, Vol. 19, nI 231, pp. 637-652.

Hooke, R. (1676): A description ofhelioscopes, and some other instruments. London

Huerta, S. (2013): *El cálculo de estructuras en las obras de Gaudí*. Universitat Politecnica de Catalunya.

Mayoral Loera, Y. (2022): Las lianas, plantas que no tienen principio ni fin. Revista de divulgación científica. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Sáez Sánchez, M. (2021): *Las formas funiculares en la historia de arquitectura y en la era contemporánea*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad politécnica de Valencia.

Sierra Fernández, L. (2019): *Curvas planas con propiedades físicas o geométricas especiales y útiles*. Universidad de Cantabria. Facultad de Ciencias.

Soler Trujillo, A. (2017): *Estudio de la relación entre tipo estructural y función biológica en la tela de araña orbicular*. Tesis Doctoral. Universidad de Madrid.

Vedoya D. y Prat, E. (2009): *Estructuras de las grandes luces. Tecnología y diseño*. Cuaderno de cátedra. Facultad de Arquitectura. UNNE.