FUNCIONES IMPLÍCITAS Y DEPENDENCIA FUNCIONAL

Alberto E.J. Manacorda*

* *Ingeniero Geógrafo*
Profesor Titular de Análisis Matemático de la U.N.R.
Ex – Subdirector del Observatorio Astronómico y Planetario
Municipal de Rosario

PRÓLOGO

El teorema de las funciones implícitas (sistemas) es probablemente el más importante del Análisis Matemático y en éste el determinante funcional o jacobiano tiene un rol preponderante. Si bien las propiedades importantes de los jacobianos son aplicables en muchos temas del análisis, nosotros queremos resaltar su relevancia en el concepto de dependencia funcional, destacando condiciones necesarias y suficientes para la dependencia y la independencia entre funciones. ¿Cuál es el motivo que nos mueve a hacer esto? Simplemente porque la dependencia funcional cumple un papel superlativo en Economía. En efecto, en el análisis económico se dan relaciones entre variables agregadas, obtenidas a partir de las interacciones, deseos e intereses de millones de consumidores y productores que, sin embargo, parecen ponerse de acuerdo en generar tanto una "demanda global" o "agregada" de un determinado bien de consumo como la correspondiente "oferta global" del mismo. Las relaciones que, con independencia del sustrato individual que las genera, se puedan establecer entre las variables serán de la mayor importancia en el estudio de mercado del bien o consumo en cuestión. Surge de esta manera una correspondencia funcional, de unas pocas variables que en realidad están vinculadas a millones de otras, sin que estas últimas aparezcan explícitamente en el problema considerado, es decir, nace una relación funcional reducida que no depende del conocimiento (imposible por otra parte) de millones de opiniones. Abonando lo antes expuesto, hacemos notar que en la descripción cuantitativa de muchos fenómenos naturales aparece una multitud de variables que por un proceso de abstracción permite descomponer un proceso complejo, en elementos más simples. Esto nos hace advertir que este mecanismo de obtención de relaciones funcionales no tiene porqué quedarse al primer nivel. No necesariamente existen variables que puedan considerarse como independientes en términos absolutos dependiendo las demás de ellas, sino que pueden existir niveles superpuestos descritos mediante funciones compuestas. Caso realmente notable es el de la teoría cinética de los gases donde las variables macroscópicas: presión (p), volumen (V) y temperatura (T), se explican en términos de las velocidades de las moléculas que componen el gas y el de los choques entre ellas y vienen definidas en términos de cuatrillones de variables que son las posiciones y velocidades de todas esas moléculas. Sin embargo siempre se verifica que $T = kpV$ con independencia de las posiciones y velocidades argumentadas que es del orden de 10^{24} variables.

El trabajo comienza con la demostración del teorema de funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones, que resulta fundamental para el tratamiento de la dependencia funcional. Luego se hace notar, con relativa simplicidad, y antes de entrar en la definición y teoremas pertinentes a la dependencia funcional, cómo dicha dependencia transforma conjuntos bidimensionales en conjuntos unidimensionales, es decir, un recinto de R^2 en un arco de curva (curva de Jordan).

A.E.J.M

Temario

1.- Funciones implícitas

1.1.- Introducción

En los cursos de Análisis Matemático suele desarrollarse detalladamente el caso $F(x,y)=0$, demostrando el teorema de existencia y unicidad, haciendo ver que si $y=f(x)$es la función determinada por dicha ecuación, entonces para todo x del conjunto en que la función $f(x)$ exista, se cumple que $F[x,f(x)]\equiv 0$.

Queremos en primer lugar considerar el caso de la ecuación $F(x_1,x_2,...,x_n;y)=0$ con el objeto de establecer si ésta define implícitamente a la y como función de las n variables $x_1,x_2,...,x_n$. Por último trataremos el caso general de funciones definidas por un sistema de ecuaciones.

1.2.- Teorema I

Sea $F(x_1,x_2,...,x_n;y)$ una función de las $n+1$ variables $x_1,x_2,...,x_n,y$, continua respecto a dichas variables en un conjunto abierto S de R^{n+1} que satisface las siguientes condiciones:

- existe un punto $(a_1,a_2,...,a_n,b)\in S$ tal que $F(a_1,a_2,...,a_n,b)=0$
- la función $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ es diferenciable en el punto $(a_1,a_2,...,a_n,b)$ de R^{n+1}
- existe no nula la derivada parcial $F_y(a_1,a_2,...,a_n,b)\neq 0$

Entonces, en un cierto entorno del punto $(a_1,a_2,...,a_n)$ de R^n formado por las variables $x_1,x_2,...,x_n$ existe al menos una función $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ tal que $b=f(a_1,a_2,...,a_n)$ y cumple idénticamente $F[x_1,x_2,...,x_n;f(x_1,x_2,...,x_n)]\equiv 0$ en dicho entorno de R^n. Por último toda función y que cumpla esas dos propiedades es diferenciable (por tanto continua) en ese mismo punto (William H. Young).

Demostración: Será suficiente considerar el caso de tres variables que indicaremos x,y,z. Llamemos (x_0,y_0,z_0) el punto en el cual F se anula: $F(x_0,y_0;z_0)=0$. Puesto que por hipótesis $F_z(x_0,y_0;z_0)\neq 0$ la función $F(x_0,y_0;z)$de la sola variable z es estrictamente creciente o decreciente en $z=z_0$ y por ser $F(x_0,y_0;z)$ continua en (x_0,y_0,z_0) existe un número positivo $\delta>0$ tal que

$$sgF(x_0,y_0;z_0-\delta)\neq sgF(x_0,y_0;z_0+\delta)$$

conservándose para $|\Delta x|<\delta$ y $|\Delta y|<\delta$ que

$$sgF(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y;z_0-\delta)=sgF(x_0,y_0;z_0-\delta)\neq$$
$$\neq sgF(x_0,y_0;z_0+\delta)=sgF(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y;z_0+\delta).$$

Por el teorema de Bolzano existe para cada $(x,y)=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ al menos un punto $z_0+\Delta z\in(z_0-\delta,z_0+\delta)$ (y quizá varios) tal que $F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y;z_0+\Delta z)=0$, es decir en $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ el valor $z=z_0+\Delta z$ define la función (acaso multiforme)

$z=f(x,y)$ que en el entorno cúbico de (x_0,y_0,z_0) de semiamplitud δ cumple $F[x,y;f(x,y)]=0$.

Como por hipótesis F es diferenciable en (x_0,y_0,z_0) el incremento

$\Delta F=F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y;z_0+\Delta z)-F(x_0,y_0,z_0)=F_x(x_0y_0z_0)\Delta x+F_y(x_0y_0z_0)\Delta y+$
$+F_z(x_0y_0z_0)\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z=0$ de donde

$$\Delta z=-\frac{(F_x(x_0y_0z_0)+\varepsilon_1)\Delta x+(F_y(x_0y_0z_0)+\varepsilon_2)\Delta y}{F_z(x_0y_0z_0)+\varepsilon}=$$

$$=\frac{-1}{F_z(x_0y_0z_0)+\varepsilon}\left[F_x(x_0y_0z_0)\Delta x+F_y(x_0y_0z_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\right] \qquad (1)$$

y como $\dfrac{-1}{F_z+\varepsilon}=\dfrac{-1}{F_z}+\dfrac{\varepsilon}{F_z(F_z+\varepsilon)}$, resulta que el último sumando del segundo miembro es un infinitésimo; reemplazando en (1) se tiene después de operar:

$$\Delta z=-\frac{F_x(x_0y_0z_0)}{F_z(x_0y_0z_0)}\Delta x-\frac{F_y(x_0y_0z_0)}{F_z(x_0y_0z_0)}\Delta y+\varepsilon'\Delta x+\varepsilon''\Delta y \qquad (2)$$

donde ε' y ε'' tienden a cero cuando $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

En consecuencia (2) muestra que $z=f(x,y)$ es diferenciable en (x_0y_0) y por consiguiente continua y derivable en dicho punto. Así, se tienen:

$$f_x(x_0,y_0)=-\frac{F_x(x_0y_0z_0)}{F_z(x_0y_0z_0)}=-\frac{F_x[x_0,y_0;f(x_0,y_0)]}{F_z[x_0,y_0;f(x_0,y_0)]}$$

$$f_y(x_0,y_0)=-\frac{F_y[x_0,y_0;f(x_0,y_0)]}{F_z[x_0,y_0;f(x_0,y_0)]}$$

Si a las hipótesis del teorema se añade que la derivada parcial $F_y(x_1,x_2,\dots,x_n;y)$ existe sin anularse en un entorno del punto $(a_1,a_2,\dots,a_n;b)$ por ejemplo es continua en $(a_1,a_2,\dots,a_n;b)$, entonces la función $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ es única, es decir, uniforme y es continua en el punto $(a_1,a_2,\dots,a_n;b)$.

En efecto, para nuestro caso de tres variables si añadimos la última hipótesis, la solución $z=f(x,y)$ es única, pues si hubiesen dos valores $z_1\neq z_2$ para los que $F(x,y,z_1)=F(x,y,z_2)$, contrariamente a lo expresado, para un $Z\in(z_1,z_2)$ sería: $0=F(x,y,z_1)-F(x,y,z_2)=(z_1-z_2)F_z(x,y,Z)$ es decir $F_z(x,y,Z)=0$

1.3.- Teorema II

Sea dado un sistema de n ecuaciones entre $m+n$ variables

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)=0\\ F_2(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_n(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

con $(x_1,x_2,\dots,x_m)\in R^m$ y $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$

que satisface las siguientes condiciones:

- existe un punto $(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)\in R^{m+n}$ tal que $F_i(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)=0$ $i:1,2,...n$
- las funciones $F_i(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n)$ son diferenciables en el punto $(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)$ de R^{m+n}.
- el jacobiano

$$J=\frac{\partial(F_1,F_2,...,F_n)}{\partial(y_1,y_2,...,y_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

supuesto existente es no nulo en $(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)$.

Entonces en un entorno del punto $(a_1,a_2,...,a_m)\in R^m$ formado por las variables $x_1,...,x_m$ existe al menos un sistema de funciones $y_i=f_i(x_1,...,x_m)$ $i:1,2,...n$ tales que $b_i=f_i(a_1,...,a_m)$ y verifican idénticamente

$$F_i\left[x_1,...,x_m;f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m)\right]\equiv 0$$

en dicho entorno de R^m.

Luego todo sistema de funciones de $x_1,...,x_m$ que cumpla esas dos propiedades es diferenciable en el punto $(a_1,...,a_m)$.

Por últimos si las derivadas parciales que componen el determinante J son funciones continuas en el punto $(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)\in R^{m+n}$ y J no se anula en las vecindades de dicho punto el sistema de soluciones $y_i=f_i(x_1,...,x_m)$ es único. (William H. Young)

Demostración: Puesto que para $n=1$ el teorema se reduce al caso anterior, podemos demostrarlo por inducción completa.

Supongamos entonces demostrado para $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas y_k; mostraremos que se cumple para n. Designemos con $J_{11},J_{21},...,J_{n1}$, los adjuntos de los elementos de la primera columna de J, entonces

$$J=\frac{\partial F_1}{\partial y_1}J_{11}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}J_{21}+...+\frac{\partial F_n}{\partial y_1}J_{n1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_1}J_{i1} \qquad (2)$$

Como por hipótesis J no se anula en el punto $(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)$, uno por lo menos de los adjuntos de (2) no se anula en dicho punto; supongamos pues que no es nulo $J_{11}=\dfrac{\partial(F_2,F_3,...,F_n)}{\partial(y_2,y_3,...,y_n)}\neq 0$ en $(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)$.

Con la hipótesis que las derivadas son continuas en el punto considerado, J_{11} no se anula en un entorno del mismo. Como por hipótesis inductiva el teorema es aplicable para $n-1$ ecuaciones, siendo $J_{11}\neq 0$ existe un sistema (único si se considera la última hipótesis) de $n-1$ funciones

$$y_2=\varphi_2(x_1,...,x_m;y_1),...,y_n=\varphi_n(x_1,...,x_m;y_1) \qquad (3)$$

de $m+1$ variables independientes $x_1,...,x_m,y_1$ que toman los valores $b_2,...,b_n$ en el punto $(a_1,...,a_m;b_1)$ y son diferenciables en dicho punto, satisfaciendo idénticamente a las $n-1$ ecuaciones.

$$F_i\left[x_1,...,x_m;y_1,\varphi_2(x_1,...,x_m,y_1),...,\varphi_n(x_1,...,x_m,y_1)\right]\equiv 0 \qquad (4)$$

$i=2,3,...,n$

Si reemplazamos las (3) en F_1, obtenemos una nueva ecuación de la forma

$$F_1\left[x_1,...,x_m;y_1,\varphi_2(x_1,...,x_m,y_1),...,\varphi_n(x_1,...,x_m,y_1)\right]\equiv \Phi(x_1,x_2,...,x_m;y_1)=0 \qquad (5)$$

Veremos ahora que existe al menos una función y_1 de las m variables $x_1,...,x_m$; diferenciable, que toma el valor b_1 en el punto $(a_1,...,a_m)$ y que satisface (5) en un entorno de dicho punto, siempre que $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}$ no se anule en el punto considerado.

Comenzamos derivando respecto a y_1 la (5) y las (4):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1} \equiv \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}+ \;\dots\; +\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \\ 0 \equiv \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}+ \;\dots\; +\dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ 0 \equiv \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_n}{\partial y_2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}+ \;\dots\; +\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \end{cases}$$

Ahora procederemos a multiplicar la primera identidad por J_{11} y las restantes respectivamente por $J_{21},J_{31},...,J_{n1}$

Entonces sumando miembro a miembro los resultados antes obtenidos, se tiene:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}J_{11}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_1}J_{i1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_2}J_{i1}+...+\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_n}J_{i1} \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_1}J_{i1}=J$$

mientras que las restantes sumas son nulas pues cada una de ellas es la suma de los elementos de una línea, multiplicados por los adjuntos de los elementos de una paralela a ella. De esta forma resulta

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}J_{11}=J \qquad \text{o sea} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=\frac{J}{J_{11}}$$

y puesto que J y J_{11} son distintos de cero, se tiene $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}\neq 0$.

A su vez, si las derivadas parciales son continuas en $(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n)$, la solución $y_1=f_1(x_1,...,x_m)$ es única, pues $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}$ no se anula nunca en las vecindades del punto $(a_1,...,a_m)$.

Si por último se sustituye en las igualdades (3) la función y_1 (cuya existencia ha sido establecida), se obtiene para $y_2,...,y_n$ un sistema de funciones de $x_1,...,x_m$ que satisface todas las condiciones del enunciado del teorema:

$$y_2 = \varphi_2\left[x_1,\ldots,x_m; f_1(x_1,\ldots,x_m)\right] = f_2(x_1,\ldots,x_m)$$

....

$$y_n = \varphi_n\left[x_1,\ldots,x_m; f_1(x_1,\ldots,x_m)\right] = f_n(x_1,\ldots,x_m)$$

1.4.- Inversión y cambio de variables.

El estudio de las funciones implícitas nos permite el de los sistemas de funciones. Caso importante es aquel en donde el número de funciones es el mismo que el de variables independientes. Como en el caso de transformaciones lineales, un conjunto de igualdades de la forma

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y,z) \\ v &= v(x,y,z) \\ w &= w(x,y,z) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

recibe también el nombre de *transformación*, pues puede interpretarse que transforma el punto de coordenadas (x,y,z) en otro de coordenadas (u,v,w), llamado *imagen* suya.

Si se interpretan las (1) como ecuaciones en las incógnitas x, y, z y pueden resolverse en ellas, tendremos tres funciones de u, v, w que constituyen la llamada transformación inversa de las (1). Esta inversa daría el punto, o puntos, (x,y,z) de donde uno dado (u,v,w) podría proceder en la transformación original o *directa*; estos (x,y,z) se llaman *pre-imágenes* o *modelos* del (u,v,w).

Si las funciones (1) son diferenciables, con jacobiano

$$J = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \neq 0$$

haremos ver que la diferenciación nos permite obtener las derivadas de x, y, z respecto de u, v, w sin conocer la transformación inversa.

Poniendo:

$$\begin{aligned} F_1(u,v,w,x,y,z) &\equiv u - u(x,y,z) = 0 \\ F_2(u,v,w,x,y,z) &\equiv v - v(x,y,z) = 0 \\ F_3(u,v,w,x,y,z) &\equiv w - w(x,y,z) = 0 \end{aligned}$$

donde el jacobiano

$$\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}$$

coincide (acaso salvo el signo) con el

$$J = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$$

diferenciando se tiene

$$\left.\begin{aligned} du - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0 \\ dv - \frac{\partial v}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial y}dy - \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0 \\ dw - \frac{\partial w}{\partial x}dx - \frac{\partial w}{\partial y}dy - \frac{\partial w}{\partial z}dz = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Entonces, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (2) por la regla de Cramer, puesto que hemos supuesto $J \neq 0$, podremos obtener, por ejemplo, dx y consecuentemente sus respectivas derivadas parciales respecto a u, v, w, así:

$$dx = \frac{1}{J}\left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} dv + \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} dw \right) =$$

$$= \frac{1}{J}\left(\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}du - \frac{\partial(u,w)}{\partial(y,z)}dv + \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}dw \right)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}}{J} \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(u,w)}{\partial(y,z)}}{J} \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}}{J}$$

1.5.- Nota:
El mismo teorema de existencia anunciado en 1.3. nos permitirá además afirmar que si las funciones (1) son continuas y tienen derivadas parciales en el entorno de un punto (x_0, y_0, z_0) y en este punto dichas derivadas parciales son continuas y el jacobiano J no es nulo, entonces existe unívocamente determinada una transformación inversa en el entorno del punto (u_0, v_0, w_0) correspondiente al (x_0, y_0, z_0) por (1). Es decir, obtendremos así entre ambos entornos una correspondencia *biunívoca,* tal que un contorno simple cerrado tiene por homólogo otro contorno simple cerrado con la misma u opuesta orientación según que J sea positivo o negativo.

2.- Dependencia funcional

En este capítulo se siguen los lineamientos de la obra de Burgos, Juan mencionada en la bibliografía.

2.1.- Introducción
Para ilustrar las definiciones que daremos en el próximo punto, comenzaremos analizando algunos ejemplos.

a) Sean dadas las funciones

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^{2x-y} \\ v(x,y) &= e^{2y-4x} \end{aligned} \quad (1)$$

estas dos funciones se dicen dependientes porque existe una cierta relación no nula entre u y v que se anula idénticamente cuando se sustituyen u y v por las expresiones (1). La tal relación es

$$F(u,v)=u^2v-1$$

Observemos que $F(u,v)$ no es nula cuando u y v varían libremente, pero no obstante se verifica que $F\left[u(x,y),v(x,y)\right]=\left(e^{2x-y}\right)^2\left(e^{2y-4x}\right)-1=e^0-1=0 \quad \forall(x,y)\in R^2$.

Este hecho conduce a que cuando (x,y) recorre todo R^2, su imagen (u,v) recorre la curva de ecuación $u^2v=1$; de modo que la función de $(x,y)\to(u,v)$ de R^2 en R^2, transforma conjuntos bidimensionales en conjunto unidimensionales. Por otra parte puesto que $v=\dfrac{1}{u^2}$ es evidente que $v=\varphi(u)$.

b) La funciones

$$f_1(x,y,z)=x(y-z) \quad ; \quad f_2(x,y,z)=y(z-x) \quad ; \quad f_3(x,y,z)=z(x-y)$$

son funcionalmente dependientes pues existe la función no idénticamente nula $F=u+v+w$ tal que se tiene $F(f_1,f_2,f_3)=x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\equiv 0$.

Así, cuando (x,y,z) recorre R^3, a su imagen le corresponde el plano $u+v+w=0$. Observemos que aún cuando F se mantenga nula en los puntos de dicho plano, no es idénticamente nula en ningún entorno completo de un punto (u,v,w). Además, la ecuación del plano puede escribirse $w=-u-v$, de modo que $w=\varphi(u,v)$ o también $f_3(x,y,z)=\varphi\left[f_1(x,y,z),f_2(x,y,z)\right]$.

Agregamos una observación adicional; el jacobiano del sistema es:

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} y-z & x & -x \\ -y & z-x & y \\ z & -z & x-y \end{vmatrix}\equiv 0$$

c) Veamos un último ejemplo. Las funciones:

$$f(x,y)=2xy+2x+1 \qquad g(x,y)=x^2y^2+2x^2y+x^2-1$$

son también funcionalmente dependientes, pues transforman un recinto de R^2 en un arco de curva. Intentemos obtener la relación que las liga.

De $2xy+2x+1=u$ se tiene $2x(y+1)=u-1$ entonces para $(x,y)\neq(0,-1)$ es $y=\dfrac{u-1}{2x}-1$ que sustituido en

$$v=x^2y^2+2x^2y+x^2-1$$

arroja:

$$v=x^2\left(\frac{u-1}{2x}-1\right)^2+2x^2\left(\frac{u-1}{2x}-1\right)+x^2-1=\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}u-\frac{3}{4}$$

$$v=\frac{1}{4}\left(u^2-2u-3\right) \tag{2}$$

Así pues resulta $g(x,y)=\dfrac{1}{4}\left[f(x,y)-1\right]^2-1$ es decir $g(x,y)=\varphi(f(x,y))$.

Aquí puede tomarse de (2) la función $F(u,v)=u^2-2u-4v-3$ no idénticamente nula, siendo el jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2(y+1) & 2x \\ 2x(y+1)^2 & 2x^2(y+1) \end{vmatrix}=0 \qquad \forall(x,y)\in R^2$$

2.2.- Definición:

Sea $D\subset R^n$ abierto. Una función $f:D\to R$ se dice que es diferenciable con continuidad o continuamente diferenciable en D si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y son funciones continuas en todo D.

El conjunto de tales funciones se denota por $C^1(D)$ y en consecuencia se las conoce como funciones de clase C^1 en D.

2.3.- Concepto de dependencia funcional.

Sea $D\subset R^n$ un conjunto abierto y consideremos m funciones reales de clase C^1 en D:

$$\left.\begin{array}{c} u_1=f_1(x_1,...,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m=f_m(x_1,...,x_n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

- Se dice que las funciones $f_1,f_2,...,f_m$ son dependientes en el conjunto D si existe una función real $F:S\to R$, $F(u_1,...,u_m)$ de clase C^1 en un conjunto abierto $S\subset R^m$ que incluya a $f_1(D)\times...\times f_m(D)$, que no se anule en ningún entorno completo de un punto de S y tal que:

$$F\left[f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)\right]\equiv 0 \qquad \forall(x_1,...,x_n)\in D$$

- También diremos que $f_k(x_1,...,x_n)$, una de las funciones dadas (1), depende funcionalmente en D de las funciones $f_i(x_1,...,x_n)$, $i=1,2,...,m$ e $i\neq k$, si existe una función φ de clase C^1 tal que

$$f_k(x_1,...,x_n)=\varphi\left[f_1(x_1,...,x_n),...,f_{k-1}(x_1,...,x_n),f_{k+1}(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)\right]$$

para todo $(x_1,...,x_n)\in D$.

- Diremos que las funciones $f_i(x_1,...,x_n)$, $i=1,2,...,m$ son funcionalmente dependientes en D si una de ellas, al menos, depende, según el punto anterior, funcionalmente de las restantes.
- Las funciones $f_i(x_1,...,x_n)$, $i=1,2,...,m$ se dicen independientes en D si no son dependientes en D.

2.4.- Observaciones.

- Sea $D\subset R^n$. Si las funciones $f_1,...,f_m$ todas de D en R son dependientes en D, entonces dichas funciones son dependientes en cualquier $D'\subset D$, pero pueden no serlo en un $D''\supset D$. Si dichas funciones son independientes en D, entonces también lo son en todo $D''\supset D$, pero no han de serlo, necesariamente, en un $D'\subset D$.

□ En Álgebra Lineal se dice que las funciones $f_1,\dots,f_m$ de D en R son linealmente dependientes, si existen ciertas constantes $k_1,\dots,k_m \in R$ no todas nulas, tales que $k_1 f_1(\bar{x})+\dots+k_m f_m(\bar{x})=0 \qquad \forall \bar{x}\in D$.

La dependencia lineal entre funciones es pues, un caso particular de dependencia funcional ya que si se cumple la anterior relación entonces también se verifica la condición de dependencia funcional para la función F, de R^n en R definida por

$$F(u_1,\dots u_m)=k_1 u_1+\dots+k_m u_m$$

□ La dependencia funcional acontece en general sin necesidad de que dicha dependencia sea lineal. Así por ejemplo las funciones $sen\,x$ y $cos\,x$ para $x\in R$ no son linealmente dependientes (pues no son proporcionales), pero son funcionalmente dependientes ya que $sen^2 x+\cos^2 x=1$, es decir, se cumple la condición de dependencia para la función $F: R^2\to R$, $F(u,v)=u^2+v^2-1$.

2.5.- Caso sencillo de dos funciones.

Sean f y g dos funciones de clase C^1 en un abierto $D\subseteq R^2$. Si g depende funcionalmente de f, según la definición anterior, existe una función de clase C^1 tal que

$$g(x,y)=\varphi\left[f(x,y)\right] \qquad \forall (x,y)\in D \tag{1}$$

Si derivamos en (1), obtenemos por la regla de la cadena:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial x}=0 \\ \varphi'\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En cada $(x,y)\in D$, el sistema lineal homogéneo (2) tiene la solución no trivial $(\varphi'(f(x,y)),-1)$ por lo que el determinante de los coeficientes ha de ser nulo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=0 \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=0$$

De lo anterior podemos establecer que si dos funciones f y g son funcionalmente dependientes en D es condición necesaria (como demostraremos en un próximo teorema general) que se anule en todo $(x,y)\in D$ el jacobiano de f y g respecto a x e y:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=0 \tag{3}$$

Como veremos a continuación si se verifica (3) $\forall(x,y)\in D$, siendo D un abierto conexo de R^2, entonces f y g son funcionalmente dependientes en un cierto subconjunto abierto de D (condición suficiente).

En efecto. Si todos los elementos de (3), o sea, todas las derivadas de f y g se anulan en todo punto $(x,y)\in D$ entonces f y g son constantes en D conexo y hay infinitas formas de expresar $g(x,y)=\varphi(f(x,y))$ ó $f(x,y)=\psi(g(x,y))$, válidas $\forall(x,y)\in D$.

Supongamos entonces que una al menos de las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ no es idénticamente nula en D.

Sea por ejemplo $f_y(x_0,y_0)\neq 0$ en un cierto punto $(x_0,y_0)\in D$. Designando con u una nueva variable, la función $F(x,y,u)=f(x,y)-u$, no idénticamente nula, queda definida en cada punto de un conjunto de tres dimensiones S, resultante de asociar a todo $(x,y)\in D$ un valor cualquiera u. Puesto que en el punto $(x_0,y_0,u_0)\in S$ donde se ha puesto $u_0=f(x_0,y_0)$, es

$$F(x_0,y_0,u_0)=0 \quad \text{y} \quad F_y(x_0,y_0,u_0)=f_y(x_0,y_0)\neq 0$$

la ecuación $F(x,y,u)=0$, por el teorema de la función implícita, se puede resolver con respecto a y obteniéndose una única función de clase C^1 $y=\phi(x,u)$ en un entorno de (x_0,u_0). Sustituyendo en $g(x,y)$ la ϕ en lugar de la y se tiene una función

$$G(x,u)=g(x,\phi(x,u)) \tag{4}$$

Si probamos que G es independiente de x, o sea, que es de la forma $\varphi(u)$ en un entorno de (x_0,u_0) entonces se tendrá

$$g(x,y)=\varphi(f(x,y)) \tag{5}$$

pues los valores que toma u en un entorno de u_0 son exactamente los valores que toma $f(x,y)$ en el correspondiente entorno de (x_0,y_0).

Claro que si se verifica (5) significa que f y g son funcionalmente dependientes en un entorno de (x_0,y_0) y esto es lo que deseamos demostrar.

Por la regla de la cadena aplicada a (4) se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{6}$$

y además por la misma regla en $F(x,\phi(x,u),u)=f(x,\phi(x,u))-u=0$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}=0 \tag{7}$$

Utilizando ahora la hipótesis de que el jacobiano se anula $\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}=0$ entonces dos líneas son proporcionales, es decir que existe λ tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y} \tag{8}$$

siendo, como sabemos, por la continuidad $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$ en un entorno de (x_0,y_0). En consecuencia por (6) y (7) teniendo en cuenta las (8), es:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)=0$$

pero esto implica que $G(x,u)$ es independiente de x en el entorno de (x_0,u_0),o sea, G toma para cada x del entorno, un valor v, que depende sólo de u, es decir, $v=\varphi(u)$. Poniendo $v_0=g(x_0,y_0)$ se tiene $v_0=\varphi(u_0)$. Por esto, mientras el punto (x,y) describe el entorno de (x_0,y_0), el punto $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ describe la curva con puntos simples $v=\varphi(u)$. Queda así demostrada la dependencia funcional entre f y g.

2.6.- Condición necesaria de dependencia funcional.

Sea D un conjunto abierto de R^n y consideremos m funciones reales $f_1,\dots,f_m$ de clase C^1 en D, siendo $m\leq n$

$$\left.\begin{array}{l} u_1=f_1(x_1,\dots,x_m,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m=f_m(x_1,\dots,x_m,\dots,x_n) \end{array}\right\}$$

Si el jacobiano de las m funciones f_i respecto de m de las n variables x_k es distinto de cero en algún punto de D, entonces las citadas funciones f_i $i=1,\dots,m$ son independientes en D. También podemos decir: si las funciones $f_1,\dots,f_m$ son dependientes en D, entonces en todo punto de D se anula el jacobiano de $f_1,\dots,f_m$ respecto de m de las variables $x_1,\dots,x_m,\dots,x_n$ (no se pierde generalidad si el jacobiano se considera respecto de las m primeras x_k ya que si es necesario se altera el orden de las variables para ocupar los m primeros lugares).

Demostración: Observemos que los dos enunciados anteriores son equivalentes, pues cada uno de ellos es el contrarrecíproco del otro.

Demostraremos el primer enunciado por reducción al absurdo, esto es, vamos a suponer que en cierto punto $(a_1,\dots,a_m,\dots,a_n)\in D$ es

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\neq 0 \tag{1}$$

y que existe una relación funcional entre $f_1,\dots,f_m$, dada por una función $F(u_1,\dots,u_m)$. Pretendemos llegar a una contradicción que nos obligue a rechazar la existencia de la función F.

Como las f_i, $i=1,\dots,m$ son de clase C^1, por cumplirse la desigualdad (1), el teorema de la función implícita permite asegurar que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - f_1(x_1,\dots,x_m,\dots,x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m - f_m(x_1,\dots,x_m,\dots,x_n) = 0 \end{array}\right\}$$

define implícitamente a $x_1,\dots,x_m$ como funciones de clase C^1 de $u_1,\dots,u_m$ y $x_{m+1},\dots,x_n$ en un cierto entorno $N \subset R^n$ del punto $(b_1,\dots,b_m,a_{m+1},\dots,a_n)$ donde $b_j = f_j(a_1,\dots,a_m,\dots,a_n)$, $j = 1,\dots,m$. Si a dichas funciones implícitas las indicamos con $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ se verifica que:

$$u_i - f_i\left[\varphi_1(u_1,\dots,u_m,x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(u_1,\dots,u_m,x_{m+1},\dots,x_n);x_{m+1},\dots,x_n\right] = 0$$

$\forall(u_1,\dots,u_m,x_{m+1},\dots,x_n) \in N$ y para $i = 1,2,\dots,m$ (2)

Cabe destacar que por ser $N \subset R^n$ un entorno del punto $(b_1,\dots,b_m,a_{m+1},\dots,a_n)$ existen un entorno $U \subset R^m$ de $(b_1,\dots,b_m)$ y un entorno $V \subset R^{n-m}$ de $(a_{m+1},\dots,a_n)$ de modo que $U \times V \subset N$ y las (2) se verifican siempre que $(u_1,\dots,u_m) \in U$ y que $(x_{m+1},\dots,x_n) \in V$.

Ahora, como para la función $F(u_1,\dots,u_m)$ se cumple que

$$F\left[f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\right] \equiv 0 \quad \forall(x_1,\dots,x_n) \in D \qquad (3)$$

por la argumentada relación funcional, esto será cierto en particular si se toma $(x_{m+1},\dots,x_n) \in V$ y

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(u_1,\dots,u_m,x_{m+1},\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \varphi_m(u_1,\dots,u_m,x_{m+1},\dots,x_n) \end{array}\right\} \quad \text{para} \quad \begin{cases} (u_1,\dots,u_m) \in U \\ (x_{m+1},\dots,x_m) \in V \end{cases} \qquad (4)$$

Llevando (4) a (3) y teniendo en cuenta las (2), encontramos que

$$F(u_1,\dots,u_m) \equiv 0 \qquad \forall(u_1,\dots,u_m) \in U$$

lo que es una contradicción pues F no puede anularse idénticamente, por propia definición, en ningún entorno completo de un punto de su conjunto de definición.

Si el número m de funciones fuese mayor que el número n de incógnitas, entonces las m funciones serían dependientes en D. En efecto si $m > n$ las funciones f_i, $i = 1,\dots,m$ se pueden considerar como funciones de m variables definidas en $D \times R^{m-n}$, escribiendo:

$$f_i(x_1,\dots,x_n) = f_i(x_1,\dots,x_n) + 0x_{n+1} + \dots + 0x_m$$

y el jacobiano

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)} = 0$$

en todo punto del campo de definición, pues tiene sus $m - n$ últimas columnas nulas.

2.7.- Condición suficiente de dependencia funcional.

a) Por brevedad de escritura indicaremos con $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ el sistema

$$\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x})\begin{cases} u_1=f_1(x_1,\dots,x_m,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m=f_m(x_1,\dots,x_m,\dots,x_n)\end{cases} \tag{1}$$

y con $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ la matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}$:

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)$$

b) Teorema del rango constante

Sea D un conjunto abierto de R^n y consideremos m funciones reales $\mathbf{f}$ de clase C^1 en D (sistema (1)), tales que la matriz jacobiana $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tenga rango r, $0< r< m$, en todo punto $\mathbf{x}\in D$, es decir:

- todos los menores de orden mayor que r de $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ son nulos en todo $\mathbf{x}\in D$ y
- para cada $\mathbf{a}\in D$, existe un menor de orden r de $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ que no es nulo.

Entonces para cada $\mathbf{a}\in D$ existe un entorno de dicho punto tal que en él se verifica:

- existen r funciones f_i independientes,
- cada una de las $m-r$ funciones f_k restantes dadas, dependen funcionalmente de las anteriores r funciones f_i .

Demostración: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $J_r(\mathbf{x})$ es el menor $r\times r$ que ocupa la esquina superior izquierda de $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$J_r(\mathbf{x})=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r}\end{vmatrix}\neq 0$$

Entonces las funciones $f_1,\dots,f_r$ son independientes en D, el cual es un entorno de $\mathbf{a}$, pues para ellas se cumple lo exigido en el teorema anterior 2.6.

Debemos demostrar que cada una de las $f_{r+1},\dots,f_m$ funciones restantes dependen de las f_i , $i=1,2,\dots,r$ en un cierto entorno de $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$ que por brevedad vamos a hacerlo sólo con f_{r+1}, pues para las demás el razonamiento es análogo. También por razones de brevedad un punto cualquiera se descompondrá de la siguiente manera $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_r,\dots,x_n)=(\bar{x},\hat{x})$ donde $\bar{x}=(x_1,\dots,x_r)$ y $\hat{x}=(x_{r+1},\dots,x_n)$, luego $\mathbf{a}=(\bar{a},\hat{a})$; además $\bar{u}=(u_1,\dots,u_r)$. Indicaremos con $b_1=f_1(\mathbf{a}),\dots,b_r=f_r(\mathbf{a})$; $\bar{b}=(b_1,\dots,b_r)$; $\bar{f}=(f_1,\dots,f_r)$ de D en R^r.

Comenzamos considerando el sistema de r ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\bar{x},\hat{x})-u_1=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r(\bar{x},\hat{x})-u_r=0\end{array}\right\} \tag{1}$$

Como $\bar{f}$ es de clase C^1 en D y puesto que el jacobiano de esta función respecto de $\bar{x}$ es no nulo en $\mathbf{a}$, es evidente que al sistema (1) podemos aplicarle el teorema de la función implícita para definir r funciones

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u},\hat{x}) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(\bar{u},\hat{x}) \\ \vdots \\ x_r = \varphi_r(\bar{u},\hat{x}) \end{cases} \tag{2}$$

de clase C^1 en un entorno N del punto $(\bar{u},\hat{x}) = (\bar{b},\hat{a})$; estas funciones son $f_i[\bar{\varphi}(\bar{u},\hat{x}),\hat{x}] - u_i \equiv 0$; $i = 1,2,...,r$ para todo $(\bar{u},\hat{x})$ del entorno considerado. Si derivamos las f_i parcialmente respecto a una cualquiera de las $\hat{x}$, que llamaremos x_k, se obtiene en el entorno $N(\bar{b},\hat{a}) \subset R^n$:

$$\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{\varphi}(\bar{u},\hat{x}),\hat{x})\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\bar{u},\hat{x})\right] + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{\varphi}(\bar{u},\hat{x}),\hat{x}) = 0 \qquad i = 1,2,...,r \tag{3}$$

Para verificar que la función f_{r+1} depende en un cierto entorno del punto $\mathbf{a}$, de las funciones $f_1,...,f_r$, llevemos los $x_1,...,x_r$ definidos por (2) a la función f_{r+1} :

$$G(\bar{u},\hat{x}) = f_{r+1}[\bar{\varphi}(\bar{u},\hat{x}),\hat{x}] \qquad \forall(\bar{u},\hat{x}) \in N \tag{4}$$

y hagamos ver que dicha función no depende de $\hat{x}$ en el entorno N (es decir al variar $\hat{x}$ en N) y en consecuencia escribiremos $G(\bar{u},\hat{x}) = G(\bar{u})$. En tal caso el teorema estará ya probado pues por la continuidad de $\bar{u} = \bar{f}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ existirá un entorno de $\mathbf{a}$ tal que $\forall\mathbf{x}$ de él se verificará que

$$f_{r+1}(\mathbf{x}) = G[f_1(\mathbf{x}),...,f_r(\mathbf{x})]$$

que es la condición de dependencia funcional.

Comprobemos que (4) no depende de $\hat{x}$, esto es, que son nulas las derivadas parciales de $G(\bar{u},\hat{x})$ respecto de todas las variables $x_{r+1},...,x_n$. Llamando como antes x_k a una cualquiera de dichas variables, derivando (4) respecto de x_k se tiene para $(\bar{u},\hat{x}) \in N$

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}(\bar{u},\hat{x}) = \sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_j}(\bar{\varphi}(\bar{u},\hat{x}),\hat{x})\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\bar{u},\hat{x})\right] + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k}(\bar{\varphi}(\bar{u},\hat{x}),\hat{x}) \tag{5}$$

Las (3) y la (5) permiten asegurar que por ser $\bar{u} = \bar{f}(\mathbf{x})$ continua en D, existe un entorno de $\mathbf{a}$ tal que $\forall\mathbf{x}$ del mismo, es:

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\bar{f}(\mathbf{x}),\hat{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{para } i = 1,2,...,r \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_k}(\bar{f}(\mathbf{x}),\hat{x}) & \text{si } i = r+1 \end{cases}$$

Desarrollando las anteriores relaciones en forma menos detallada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_r}\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_k}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial f_r}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\ldots+\dfrac{\partial f_r}{\partial x_r}\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_k}+\dfrac{\partial f_r}{\partial x_k}=0 \\
\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\ldots+\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial x_r}\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_k}+\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k}=\dfrac{\partial G}{\partial x_k}
\end{array}\right\} \text{ para cualquier } k=r+1,\ldots,r \qquad (6)$$

Interpretando (6) como un sistema de $r+1$ ecuaciones lineales en las $r+1$ incógnitas $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k},\ldots,\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_k},1$, que es compatible, pues dichas derivadas existen, resulta que el determinante de este sistema es nulo en un entorno de $\mathbf{a}$ pues es el jacobiano $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_r,f_{r+1})}{\partial(x_1,\ldots,x_r,x_k)}$, esto es, un menor de orden $r+1$ de la matriz $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ cuyos menores de orden mayor que r son nulos en D.

Como el sistema es compatible y su determinante es nulo, son también nulos todos los determinantes que se obtienen al sustituir una columna cualquiera de aquel por la columna de los términos independientes. En particular lo será el determinante que resulta de sustituir la última columna por los elementos de los términos independientes, esto es:

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdot & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} & 0 \\
\cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\
\dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots\cdot & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} & 0 \\
\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots\cdot & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial x_r} & \dfrac{\partial G}{\partial x_k}
\end{vmatrix}=0$$

el cual al ser desarrollado por los elementos de esta última columna, resulta

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)}\cdot\frac{\partial G}{\partial x_k}=0$$

es decir $J_r(\mathbf{x})\cdot\dfrac{\partial G}{\partial x_k}=0$, pero como por hipótesis $J_r(\mathbf{x})\neq 0$, resulta que $\dfrac{\partial G}{\partial x_k}=0 \quad \forall\mathbf{x}$ del entorno de $\mathbf{a}$. En consecuencia G no depende de $\hat{x}$ y esto es lo que deseábamos demostrar.

Notas Bibliográficas

- BURGOS, Juan de – "Cálculo Infinitesimal de varias variables". Mc Graw-Hill. España. 1995.
- DIEUDONNÉ, J. – "Fundamentos de análisis moderno". Ed. Reverté S.A. Barcelona. 1966.
- FERNÁNDEZ PÉREZ, VAZQUEZ HERNANDEZ y VEGAS MONTANER- "Cálculo diferencial de varias variables". Thomson Editores. España. 2002.
- LA VALLÉE POUSSIN, CH. J. de – "Cours d'analyse infinitésimale". Tomo I. Dover Publications. New York. 1946.
- MANACORDA, Alberto E.J. – "Teoremas de existencia. Globales y locales". Fundación San Cristóbal. Rosario. 2007
- REY PASTOR, PI CALLEJA y TREJO – "Análisis Matemático". Vol. II. Editorial Kapelusz. 1957.
- SAGASTUME BERRA, A. – "Introducción a la matemática superior". Publicaciones especiales. U.N. de La Plata. 1946.
- SEVERI, F. – "Lecciones de análisis ". Tomo II. Editorial Labor S.A. España. 1956.