

## **Fractales en la naturaleza: la sencillez de lo complejo. Parte 1: Estado del arte.**

Autor: Pablo Beneyto

Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería – U.N.N.E.  
Av. Las Heras 727 – H3500 – Resistencia – Chaco – Argentina  
T.E.: 03722-425064 – email: pbeneyto@ing.unne.edu.ar

### **Fractales**

#### **¿Qué es un fractal?**

Un fractal es un objeto semi geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala. En otras palabras, si se enfoca una porción cualquiera de un objeto fractal (utilizando un magnificador, o hasta un microscopio, para ello), la sección resultante es una réplica a menor escala de la figura principal.

El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales poseen marcadas características fractales.

A un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características:

- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Posee detalle a cualquier escala de observación
- Es autosimilar (exacta, aproximada o estadística).
- Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
- Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

No basta con una sola de estas características para definir un fractal. Por ejemplo, la recta real no se considera un fractal, pues a pesar de ser un objeto autosimilar carece del resto de características exigidas.

Un **fractal natural** es un elemento de la naturaleza que puede ser descrito mediante la geometría fractal. Las nubes, las montañas, el sistema circulatorio, las líneas costeras o los copos de nieve son fractales naturales. Esta representación es aproximada, pues las propiedades atribuidas a los objetos fractales ideales, como el detalle infinito, tienen límites en el mundo natural.

Otro aspecto importante sobre los fractales es que su dimensión es fraccionaria. Es decir, en vez de ser unidimensional, bidimensional o tridimensional (como es el para los objetos que nos son más familiares), la dimensión en la mayoría de los fractales no se ajusta a dichos conceptos tradicionales. Más aún, su valor raramente puede ser expresado con un número entero. Esto es, precisamente, lo que les ha dado su nombre.

Muchas veces, los fractales se subscriben a la definición anterior. Otras no: en vez de observarse la misma estructura en proporciones menores de la figura principal, serán evidentes rasgos y patrones nuevos. Ello dependerá del tipo de fractal examinado y, como debe ser evidente, de la función matemática utilizada para producirlo.

## Orígenes

Para encontrar los primeros ejemplos de fractales hay que remontarse a finales del siglo XIX, en 1872 apareció la función de Weierstrass, cuyo grafo hoy en día consideraríamos fractal, como ejemplo de función continua pero no diferenciable en ningún punto.

En 1883 Cantor presenta su conjunto, también conocido como polvo de Cantor, el cual consistía en hacer desaparecer en cada iteración el tercio central de un segmento, dejando ver la paradoja de los fractales mediante la cual el conjunto desaparecía, pero estaba formado por infinitos puntos, más tarde Koch presentó su famosa curva, la cual si bien era cerrada, y por lo tanto se suponía finita, era infinita por definición matemática.

En 1919 Hausdorff (ver Capítulo 2 de Falconer (2003)) ideó un método para medir las dimensiones y medidas de los fractales, el llamado *medida y dimensión Hausdorff*. Al año siguiente Besicovitch, interesado por el trabajo de Hausdorff, en particular por la dimensión Hausdorff 1, creó la *teoría geométrica de la medida*.

En 1963 Edward Lorenz, meteorólogo, intuía el *efecto mariposa* al redondear unos decimales en su programa de ordenador que simulaba situaciones meteorológicas. Al variar ligeramente el número de decimales después de la coma e introducir los resultados en su ordenador el programa devolvió unos resultados sorprendentemente diferentes a los anteriores. El caos matemático había nacido.

La expresión *efecto mariposa* proviene del hecho que el aleteo de una mariposa en un remoto lugar de la Tierra puede originar un tornado en otro lugar, exageraciones aparte, el caos demuestra que ligeras variaciones en las condiciones iniciales pueden originar resultados impredecibles.

Gaston Julia (1893-1978) fue un precursor en lo que hoy se conoce como fractales. Fue el primero en estudiar el tema, y explicar cómo a partir de cualquier función compleja se puede fabricar, por medio de una sucesión definida por inducción, un conjunto cuya frontera es imposible de dibujar a pulso (por ser de longitud infinita, entre otras propiedades). Fue uno de los grandes precursores de la matemática fractal. Nacido en 1893 fue herido en la cara durante la Primera Guerra Mundial, durante su estancia en el hospital se interesó por las iteraciones de funciones complejas y finalmente publicó el artículo "Informe sobre la iteración de las funciones racionales" de 199 páginas en la revista francesa *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

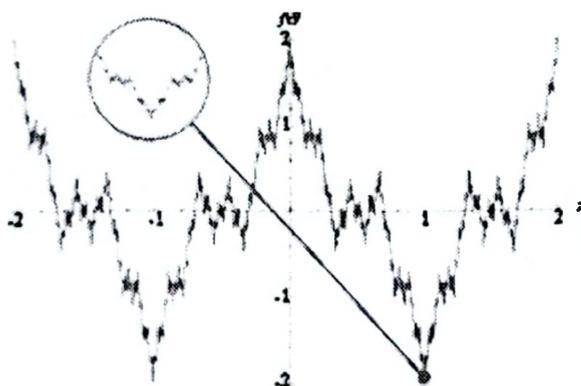
Julia falleció antes que se volvieran muy populares los fractales, a inicios de los años ochenta. Este interés tardío, que sigue vivo hoy, fue debido al segundo padre de éstos, el matemático también francés Benoit Mandelbrot, quién tuvo una ventaja enorme sobre Gaston Maurice Julia: pudo aprovechar la invención del ordenador. Todas las propiedades de los fractales que estableció Julia a fuerza de cálculos y deducciones, con papel y lápiz, las podían observar en su pantalla Mandelbrot y los millones de propietarios de ordenadores personales con modo gráfico. A finales de los ochenta, los artistas se interesaron en el conjunto de Mandelbrot y en menor medida en los conjuntos de Julia, que están intrínsecamente relacionados.

Benoit Mandelbrot (1924), en los años 70 y posteriores, se interesó mucho por la posibilidad de que una regla o cierto tipo de orden determinaran el ruido que se proyectaba en las comunicaciones entre ordenadores. Este ingeniero de l'Ecole Polytechnique de París, de la IBM Fellow en el J.J. Watson Research Center y profesor de matemáticas en la universidad de Harvard había dado el primer gran paso al publicar el libro sobre el cual reposan los fundamentos de la matemática fractal: *The Fractal Geometry of Nature* (La geometría fractal de la naturaleza 1977, 1982, 1983).

En 1987, el matemático inglés Michael F. Barnsley descubrió la transformación fractal, capaz de detectar fractales en fotografías digitalizadas, lo que permitió crear la compresión fractal para imágenes. Pero quizá el verdadero protagonista de la historia fractal haya sido la computadora. Este gran invento que revolucionó el mundo permitió dar pasos agigantados en numerosas ciencias, entre ellas la matemática.

Los fractales quizá no hubieran sido objeto de estudio si no hubieran existido ordenadores o hubieran seguido siendo *monstruos* destinados a los pies de página o márgenes.

## Función de Weierstrass



La función de Weierstrass es muy particular. Su nombre, por supuesto es por su mentor, quien la publicó por primera vez, Karl Weierstrass. Está definida en la recta y toma valores reales. Lo que la hace particular es que es continua en todo punto y no es derivable o diferenciable en ninguno.

La función de Weierstrass fue la primera conocida con esta propiedad. De este modo, Weierstrass mostró que

era falsa la conjetura que circulaba en aquella época que afirmaba que las funciones continuas eran diferenciables salvo en puntos aislados.

La función, tal como la definió Weierstrass, es la siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

donde  $0 < a < 1$ ,  $b$  es un entero impar y positivo y cumplen que:  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$

La prueba de que la función es continua es sencilla. Dado que las sumas parciales son continuas y que la serie es uniformemente convergente, se deduce que el límite es continuo.

Otra propiedad interesante de esta función es su condición fractal. Si bien su gráfico no es rigurosamente autosemejante (véase ampliación en el gráfico, arriba), la dimensión del mismo gráfico no es uno ni dos. De hecho la dimensión de Hausdorff

está acotada inferiormente por  $\frac{\log a}{\log b + 2}$  y se cree que ese sea su valor (eso es lo que se prueba en el libro de Falconer).

## Polvo de Cantor

Probablemente, el primer objeto fractal puro en la historia haya sido el polvo de Cantor, que fue descrito por el matemático alemán Georg Cantor (inventor de la teoría de los conjuntos) alrededor de 1872, siendo un destacado subconjunto fractal del intervalo real  $[0, 1]$ , que admite dos definiciones equivalentes:

- la definición numérica: es el conjunto de todos los puntos del intervalo real  $[0, 1]$  que admiten una expresión en base 3 que no utilice el dígito 1.
- la definición geométrica, de carácter recursivo, que elimina en cada paso el segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo.

El polvo de Cantor se inicia con un segmento lineal (conocido como el iniciador); éste se divide en tres segmentos menores de la misma longitud, el central de los cuales se extrae. Este proceso (denominado, usualmente, como el generador) se repite indefinidamente, al final de lo cual, si tiene final, se habrá producido el polvo de Cantor.

La iteración puede describirse como un mecanismo de retroalimentación, que se repite un número  $n$  de veces. Esto se refiere, por ejemplo, al acto de utilizar un valor inicial en el cálculo de cierta función, y luego tomar el producto, o resultado, como valor inicial para el próximo cálculo de esa misma función. Dicha operación puede repetirse indefinidamente (incluso infinitamente), produciendo una iteración. Cualquier proceso semejante tendrá como resultado un fractal.

A pesar de ser una figura extremadamente sencilla, recoge todos los atributos discutidos sobre los fractales hasta el momento: presenta autosimilitud a cualquier escala y su dimensión es fraccionaria, con valor aproximado de  $0,630929753571457437099527114$  ( $\log 2/\log 3$ ). Igualmente, observando el comportamiento del mismo se puede introducir otra característica general de este tipo de objeto: son producidos por procesos de iteración.



Iteración del polvo de Cantor.

Puede observarse en la figura superior, de arriba hacia abajo, los sucesivos pasos de la construcción geométrica del conjunto de Cantor. Para ilustrar la definición numérica se destacan puntos expresados en base 3, destacándose que además de ser una curiosidad matemática, contradice una intuición relativa al tamaño de objetos geométricos: es un conjunto de medida nula, pero no es vacío ni numerable.

### Construcción geométrica

Se construye de modo recursivo dando los siguientes pasos:

- El primer paso es tomar el intervalo  $[0, 1]$ .
- El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir el intervalo abierto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

- El tercero es quitar a los dos segmentos restantes sus respectivos tercios interiores, es decir los intervalos abiertos  $(1/9; 2/9)$  y  $(7/9; 8/9)$ .
- Los pasos siguientes son idénticos: quitar el tercio de todos los intervalos que quedan. El proceso no tiene fin.

Se puede observar en la figura las siete primeras etapas de la construcción.

El conjunto de Cantor es el conjunto de los puntos restantes: entre ellos, es claro que los extremos de cada subintervalo pertenecen 0 y 1,  $1/3$  y  $2/3$ ,  $1/9$ ,  $2/9$ ,  $7/9$  y  $8/9$ ,  $1/27$ ..., hay una infinidad de puntos: los  $1/3^n$  están todos incluidos, con  $n$  describiendo los naturales. Pero hay mucho más, por ej.  $1/4$  es un elemento del conjunto de Cantor.

## Propiedades

### Medida

El conjunto es pequeño cuando se considera su longitud: el intervalo inicial  $[0,1]$  mide 1, y a cada paso, se le quita un tercio, lo que hace que su longitud se multiplique por  $2/3$ . la sucesión geométrica  $u_n = (2/3)^n$  tiende hacia cero, Por lo tanto el conjunto de Cantor es de medida nula. Esto implica, en particular, que el conjunto de Cantor no puede contener ningún intervalo de medida no nula.

### Cardinalidad

Puede demostrarse el siguiente resultado paradójico: el conjunto de Cantor está en biyección con el segmento  $[0, 1]$ , es decir, tiene tantos elementos como él, para demostrar esto, se construye una función suprayectiva desde el conjunto de Cantor (llamada C) al conjunto de los reales  $[0, 1]$ . De esta forma, la cardinalidad de C ha de ser no menor que la de  $[0, 1]$ . Por otra parte, como C es un subconjunto de  $[0, 1]$ , C tendrá además una cardinalidad no mayor. Por tanto se concluye que las cardinalidades de C y  $[0, 1]$  han de ser iguales.

La función suprayectiva se construye de la siguiente manera: si se considera la escritura en **base tres** de los números, se nota que, al quitar siempre el segundo tercio de todos los segmentos, se suprime exactamente los números que tienen un 1 en su escritura *trienal*: el intervalo  $(1/3; 2/3)$  corresponde a los números que empiezan por 0,1 (menos el  $1/3$  que también se puede escribir 0, 0222222222.... en base tres); el intervalo  $(1/9;2/9)$  corresponde a los números que empiezan por 0,01, el  $(7/9;8/9)$  por 0,21 y así sucesivamente.

La suprayección se construye así: a cada número escrito con sólo *ceros* y *dos* se le hace corresponder el número en **base dos** obtenido reemplazando todos sus *dos* por *unos*. Por ejemplo, 0,2002 en base tres (que vale  $2/3 + 2/81 = 56/81$ ) tiene como imagen 0,1001 en base dos (que vale  $1/2 + 1/16 = 9/16$ ).

Se obtiene así todos los números en base dos que empiezan por 0,... y que tienen ceros o/y unos después de la coma: ¡es el intervalo  $[0,1]$  entero!

### Propiedades topológicas

El conjunto de Cantor es cerrado en los reales, al ser el complemento de la unión de abiertos.<sup>2</sup> Al ser también acotado, por aplicación del teorema de Heine-Borel, puede afirmarse que es compacto.

### Autosimilitud

Se lo puede considerar como el atractor asociado al IFS (sistema de funciones iteradas)

formado por las aplicaciones contractivas  $f_1(x) = \frac{x}{3}$ , y  $f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ , ambas definidas sobre el compacto  $[0,1]$ .

Se observa además que la imagen del conjunto de Cantor por la homotecia de centro  $0$  y razón  $1/3$  es una parte del propio conjunto de Cantor. Esto es una manifestación de autosimilitud, que es una de las propiedades básicas de los fractales. Su dimensión de Hausdorff es menor que uno, concretamente  $\log(2)/\log(3)$ .

## Generalizaciones

### En dimensión uno

En lugar de eliminar en cada paso la tercera parte central, podría plantearse eliminar cualquier otro porcentaje fijo (distinto de 0% o de 100%) de la zona central. Los conjuntos resultantes siguen siendo homeomorfos al conjunto de Cantor. Sin embargo, mientras la longitud del intervalo eliminado sea mayor o igual a la tercera parte, la medida de Lebesgue del conjunto será cero; en otro caso, la medida será positiva (más específico, la medida de Lebesgue es de  $1-a$ , donde  $a$  es la razón de longitudes entre el intervalo eliminado en el primer paso y  $1/3$ ).

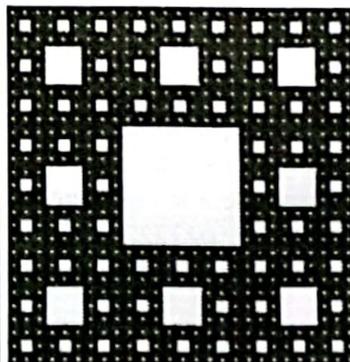
Eliminando porcentajes que disminuyan progresivamente en cada paso, pueden construirse conjuntos también homeomorfos al conjunto de Cantor, pero con medida de Lebesgue positiva (Ej.: el conjunto de Smith-Volterra-Cantor)

### El conjunto de Cantor en otras dimensiones

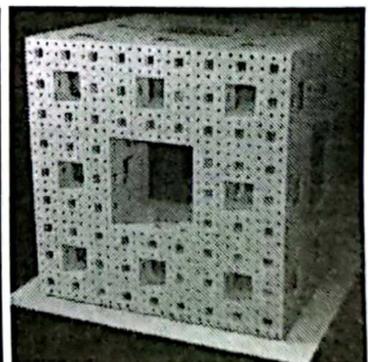
En cualquier dimensión se define el producto cartesiano del conjunto de Cantor por sí mismo, que recibe el nombre de polvo de Cantor. Además, en dimensión 2 se define la alfombra de Sierpinski, y en dimensión 3 la esponja de Menger, como se verá más adelante.



Polvo de Cantor en 3 D



Alfombra de Sierpinski



Esponja de Menger

Posteriormente aparecieron ejemplos con propiedades similares pero una definición más geométrica. Dichos ejemplos podían construirse partiendo de una figura inicial (semilla), a la que se aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite que correspondía al que hoy llamamos conjunto fractal. Así, en 1904, Helge von Koch definió una curva con propiedades similares a la de Weierstrass: el copo de nieve de Koch.

### Copo de nieve de Koch

El copo de nieve de Koch es una de las más sencillas figuras fractales, y una de las primeras. Fue inventada por el matemático sueco Helge von Koch en 1906.

#### Construcción

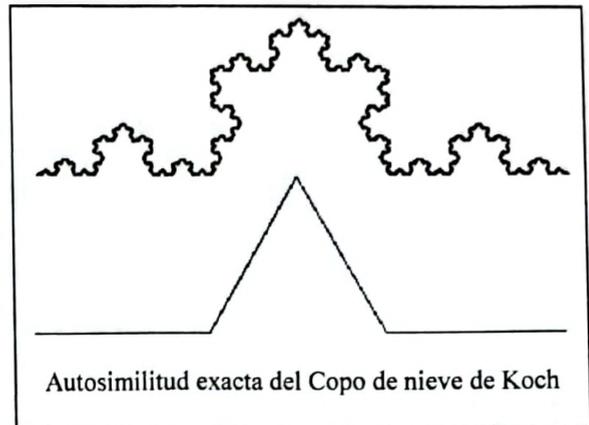


Concepción artística de un Copo de Koch

Su construcción es como sigue: Se toma un segmento, se lo divide en tres partes iguales, se reemplaza la parte central por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de  $\pi/3$  radianes (60 grados). Luego, con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da 16 segmentos pequeños. Y así sucesivamente, sin nunca parar. La figura representa las seis primeras etapas de la construcción. La última curva es una buena aproximación de la curva final.

Si se considera de nuevo la primera figura, notamos que para pasar de una línea a la siguiente se reemplaza tres segmentos por cuatro de igual longitud, o sea que la longitud total es multiplicada por  $4/3$ . El límite de la sucesión geométrica de razón  $4/3$  es infinito, lo que significa que la figura final tiene una longitud infinita (lo que Mandelbrot denomina *infinito interno*).

Esta característica, típica de los fractales, añadida al hecho que la curva da la impresión de tener cierto espesor a causa de sus constantes cambios de dirección, sugiere que esta figura no es unidimensional. Su dimensión tiene que estar entre 1, la de una recta, y 2, la del plano. Para hallarla miremos la última curva: Si agrandamos (mediante una homotecia) tres veces la sección A'B' obtenemos exactamente la sección AB. En la curva final, obtendríamos la sección A'C, es decir cuatro veces la sección inicial.



Se sabe que una homotecia de razón tres multiplica las longitudes por 3, las superficies por  $3^2 = 9$ , los volúmenes por  $3^3 = 27$ , y más generalmente, el "volumen" de objeto de dimensión  $d$  por  $3^d$ . Entonces tenemos  $3^d = 4$  para el copo de Koch, lo que da:  $d = \ln 4 / \ln 3 = 1,26186\dots$

La configuración opuesta-complementaria de un *copo de nieve de Koch* o copo de nieve fractal suele ser denominada *anticopo de nieve*.

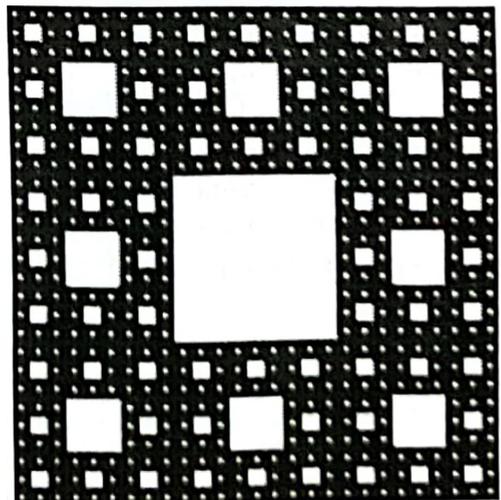
En 1915, Sierpinski construyó su triángulo y, un año después, su alfombra.

## Alfombra de Sierpinski

La **alfombra de Sierpinski** es un conjunto fractal descrito por primera vez por Waclaw Sierpiński en 1916. Constituye una generalización a dos dimensiones del conjunto de Cantor. Comparte con él muchas propiedades: también es un conjunto compacto, no numerable y de medida nula.

No debe confundirse con otras generalizaciones como el polvo de Cantor.

Es **universal** para todo objeto compacto del plano. Así, cualquier curva dibujada en el plano con las autointersecciones que queramos, por complicada que sea, será homeomorfa a un subconjunto de la alfombra de Sierpinski.

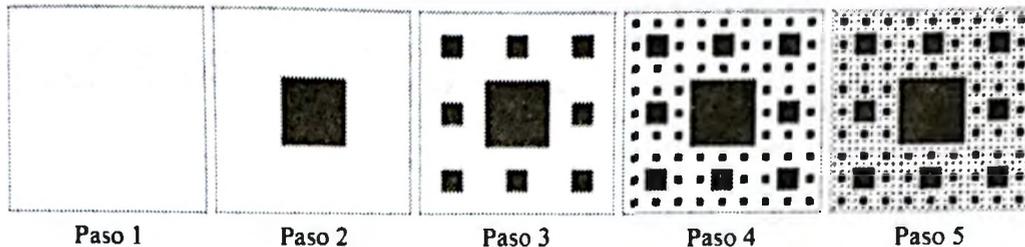


## Construcción

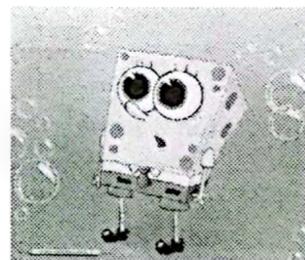
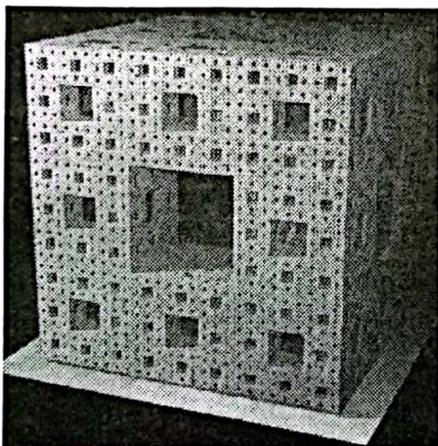
La construcción de la alfombra de Sierpinski se define de forma recursiva:

1. Comenzamos con un cuadrado.
2. El cuadrado se corta en 9 cuadrados congruentes, y eliminamos el cuadrado central.
3. Se aplica el paso anterior recursivamente a cada uno de los 8 cuadrados restantes.

La alfombra de Sierpinski es el límite de este proceso tras un número infinito de iteraciones.



## Esponja de Menger



En matemáticas, la **esponja de Menger** es un conjunto fractal descrito por primera vez en 1926 por Karl Menger mientras exploraba el concepto de dimensión topológica.

Al igual que la alfombra de Sierpinski constituye una generalización bidimensional del conjunto de Cantor, ésta es una generalización tridimensional de ambos. Comparte con éstos muchas de sus propiedades (conjunto compacto, no numerable y medida de

Lebesgue nula). La dimensión fractal de Hausdorff es  $d_H = \frac{\log 20}{\log 3} \sim 2.7268$ .

Es de destacar su propiedad de **curva universal**, pues es un conjunto topológico de dimensión topológica uno, y cualquier otra curva o grafo es homeomorfo a un subconjunto de la esponja de Menger.

## Construcción

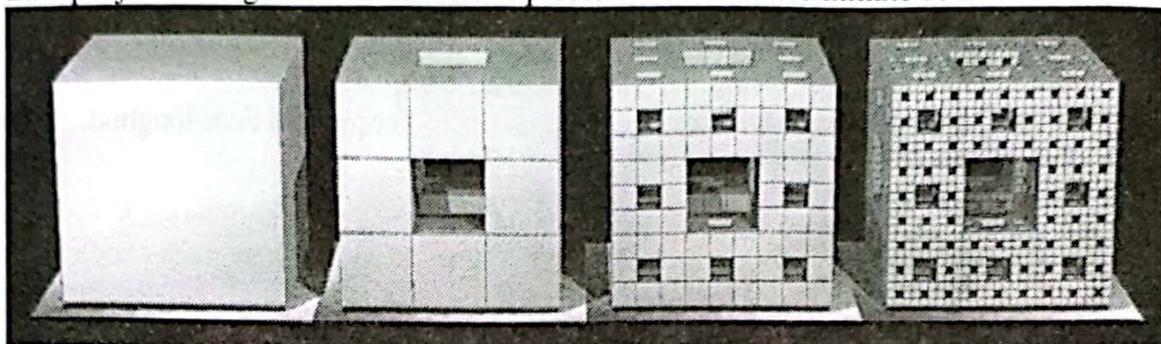
La construcción de la esponja de Menger se define de forma recursiva:

1. Comienza con un cubo (*primera imagen inferior*).
2. Se divide cada cara del cubo en 9 cuadrados. Esto subdivide el cubo en 27 cubos más pequeños, como le sucede al cubo de Rubik.

3. Se eliminan los cubos centrales de cada cara (6) y el cubo central (1), dejando solamente 20 cubos (*segunda imagen inferior*).

4. Repetimos los pasos 1, 2 y 3 para cada uno de los cubos menores resultantes.

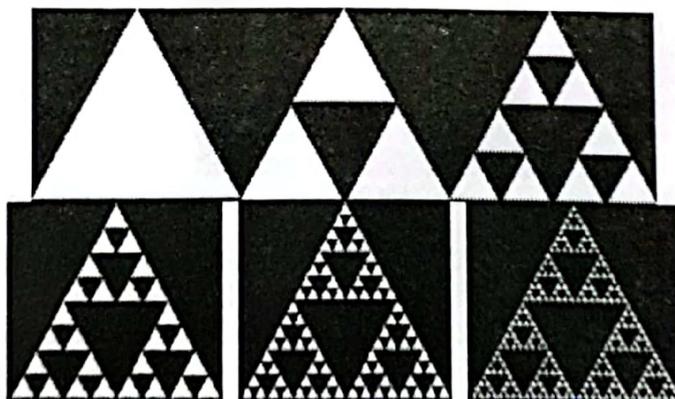
La esponja de Menger es el límite de este proceso tras un número infinito de iteraciones.



### Triángulo de Sierpinski

De manera similar a la alfombra de Sierpinski, puede plantearse la construcción del triángulo de Sierpinski, una figura inventada por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1915.

Para esto, se comienza con un triángulo equilátero, en su interior, se traza otro triángulo equilátero, cuyas puntas o esquinas deben coincidir con los puntos medios de cada lado del triángulo mayor. Esta nueva figura tendrá una orientación invertida con respecto a la primera. Seguido, se retira, o se elimina, de la figura ese nuevo triángulo invertido, tal que solamente se conserven los tres triángulos equiláteros menores que se observan dentro del grande. Luego, realizamos el mismo procedimiento (de iteración) para cada triángulo pequeño, obteniéndose, como resultado, un triángulo de Sierpinski.



Iteración de un triángulo de Sierpinski.

Hay que tener en cuenta que cuando se elimina ese nuevo triángulo, al igual que en conjuntos anteriores, no solo se quita el triángulo mismo, sino que los puntos contenidos en esa área, específicamente, no pertenecen al conjunto de puntos comprendidos en el triángulo de Sierpinski; o dicho de otro modo, esa sección no pertenece al conjunto.

## Algunas consideraciones sobre dimensión fractal

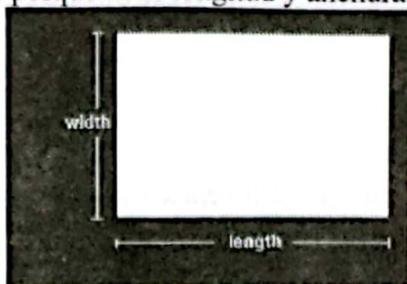
En geometría, un punto no tiene dimensión alguna porque no tiene longitud, anchura o profundidad.

Un punto.

Una línea es unidimensional (tiene una sola dimensión) porque sólo tiene longitud.

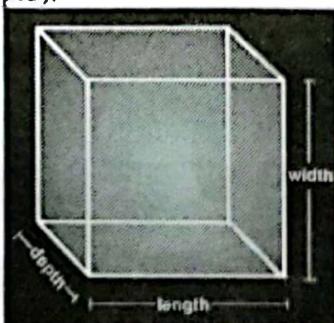
Una línea.

Un plano es bidimensional porque tiene longitud y anchura (largo y ancho).



Un plano.

Una caja, o un cubo, es tridimensional porque tiene longitud, anchura y profundidad (largo, ancho y alto, por ejemplo).



Un cubo.

Hasta aquí, se hizo referencia al concepto ordinariamente asociado a la **dimensión** (también llamada euclidiana o dimensión topológica). Los fractales, por su parte, tienen **dimensiones fraccionarias**, cuyos valores, generalmente, sólo se expresan con **números no-enteros**, tales como 1,7; 0,5326478 ó 3,28. ¿Cómo es eso posible?

Al dividir por la mitad la medida de la longitud de un objeto unidimensional, se obtienen dos objetos pequeños de idéntica apariencia al objeto original.



División de una línea.

Al dividir por la mitad la medida de la longitud y la anchura de un objeto bidimensional, se obtienen cuatro copias más pequeñas de dicho objeto.

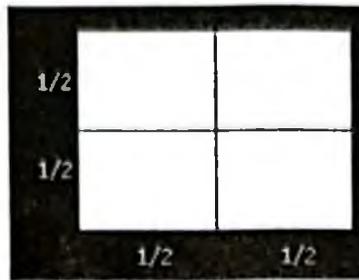


Figura 11: división de un plano.

Al dividir por la mitad la medida de la longitud, la anchura y la profundidad de un objeto tridimensional, se obtienen ocho copias a escala del objeto original.

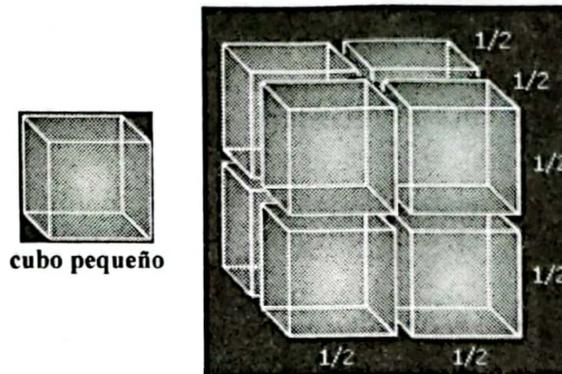


Figura 12: división de un cubo.

Observando con detenimiento, se tiene lo que puede llamarse, duplicación geométrica (o crecimiento exponencial), pues la duplicación ocurre a "razón" exponencial de 2, 4, 8 y así sucesivamente. Aritméticamente, estos números pueden expresarse como:

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

Al examinar el valor del exponente en cada caso, puede verse que éste es idéntico al valor de la dimensión de cada objeto: 1, 2 y 3.

Puede realizarse lo anterior con un objeto fractal. Tomando como ejemplo el triángulo de Sierpinski. Se divide por la mitad la medida de su altura y base, se obtienen solo tres copias a escala de dicha figura (recordar que la sección central (el triángulo invertido-no pertenece al triángulo). Entonces, necesitamos un exponente tal que  $2^x = 3$ .

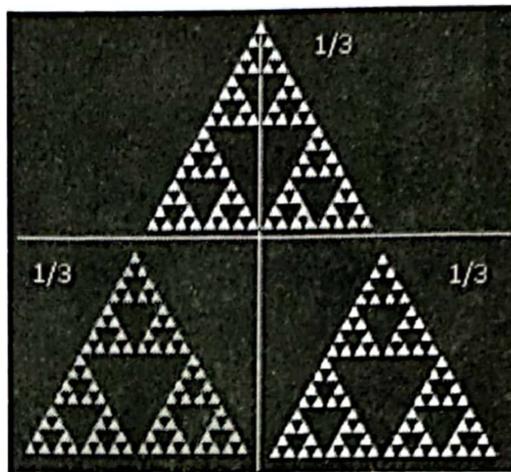


Figura 13: división de un triángulo de Sierpinski.

El triángulo de Sierpinski no es unidimensional porque 3 es mayor que 2, pero tampoco es bidimensional porque 3 es menor que 4. Así pues, su dimensión debe estar entre esas dos dimensiones (1 y 2). En realidad, es cerca de 1.5849625007211561814.

## Curva de Peano



La **Curva de Peano**, nombrada así en honor al matemático italiano Giuseppe Peano, es una curva que, en su límite, recubre todo el plano. Al cambiar la dimensión en su límite se sitúa en el contexto de la geometría fractal.

Las propiedades de la Curva de Peano son:

- No pasa dos veces por el mismo punto.
- Es continua y converge uniformemente.
- La función que define la curva es inyectiva, y es homeomorfa a un intervalo, sin embargo, su límite es de una dimensión superior.

Estos conjuntos mostraban las limitaciones del análisis clásico, pero eran vistos como objetos artificiales, una "galería de monstruos", como los denominó Poincaré. Pocos matemáticos vieron la necesidad de estudiar estos objetos en sí mismos.

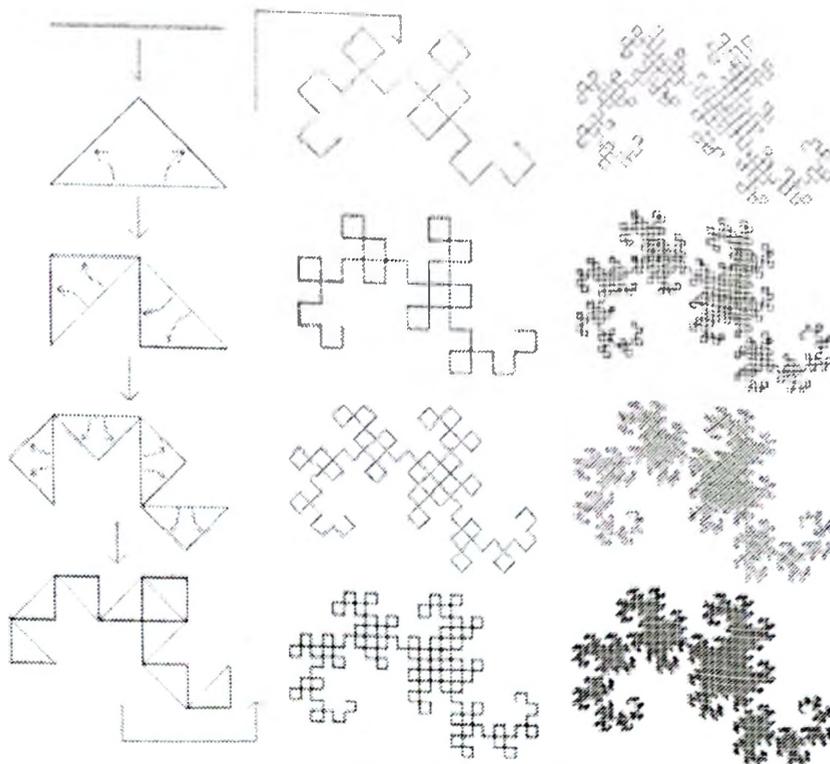
Puede obtenerse una figura fractal de características semejantes utilizando la curva de Hilbert.

## Curva del dragón

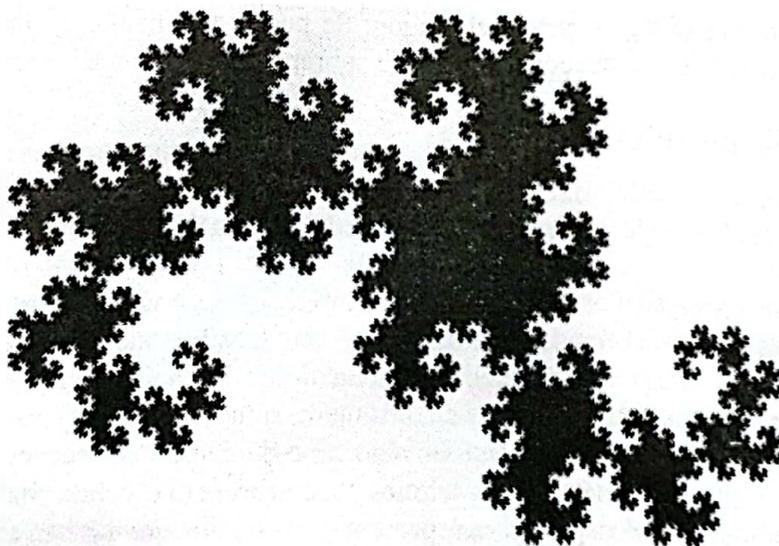
La **curva del dragón** es un fractal que se construye siguiendo los siguientes pasos:

- A partir de un segmento, se construye el triángulo rectángulo e isósceles, como lo muestra las dos primeras figuras. Luego se borra el segmento inicial.
- Se repite un sinnúmero de veces el proceso de remplazar un segmento por otros dos para cada línea de la curva, alternando siempre la orientación de los triángulos.

La siguiente figura muestra los trece primeros pasos:



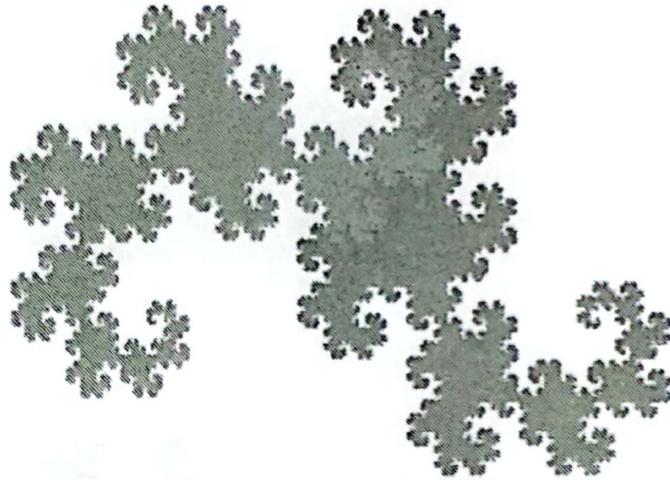
Agrandando la imagen y después de una veintena de iteraciones, se obtiene la *curva del dragón*



Como se puede observar, esta curva llega a rellenar completamente una parte del plano, por lo que su dimensión fractal debe ser 2. El cálculo de su dimensión se hace como en el copo de nieve de Koch, pues las construcciones de ambas curvas son similares. Si uno se fija en el primer paso de la construcción, se observa que a partir del segmento inicial se obtienen los otros catetos del primer triángulo mediante dos similitudes (una es indirecta) de razón  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , de centros los extremos del segmento, y de ángulos  $\frac{\pi}{4}$  y  $-\frac{\pi}{4}$  radianes (o sea  $45^\circ$ ). Llamemos  $s_1$  y  $s_2$  éstas dos similitudes. Por construcción misma, la  $n$ -ésima figura obtenida en el proceso,  $D_n$ , es la reunión de las imágenes por  $s_1$  y  $s_2$  de la figura anterior  $D_{n-1}$ :  $D_n = s_1(D_{n-1}) \cup s_2(D_{n-1})$

Tomando el límite de ésta relación (  $n$  tiende hacia  $+\infty$ ), y llamando  $D = D_x$  la curva del dragón, obtenemos:  $D = s_1(D) \sqcup s_2(D)$

Es decir que  $D$  es la reunión de dos copias de si misma, a escala  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , como se puede ver en la figura siguiente:



Por tanto al agrandar  $D$  con una homotecia de razón  $\sqrt{2}$ , se obtiene dos veces  $D$ , a la misma escala. Si  $D$  es de dimensión  $d$ , su "volumen" es multiplicado por  $\sqrt{2}^d$  por esta homotecia. Aquí tenemos pues:  $\sqrt{2}^d = 2$  y por tanto  $d = 2$ . Y para terminar, una sorprendente propiedad de la curva del dragón: Se puede pavimentar el plano con ella, es decir rellenarlo sin dejar huecos y sin que se sobrepongan dos o más "piezas".

## Los conjuntos de Julia

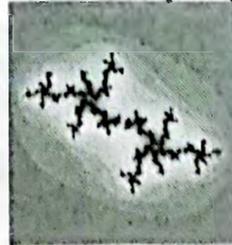
Estos conjuntos, fruto de los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia en los años 1920, surgen como resultado de la aplicación reiterada de funciones holomorfas  $z \rightarrow f(z) \rightarrow f(f(z)) \rightarrow \dots$

Analicemos el caso particular de funciones polinómicas de grado mayor que uno. Al aplicar sucesivas veces una función polinómica es muy posible que el resultado tienda a  $\infty$ . Al conjunto de valores de  $z \in \mathbb{C}$  que no escapan al infinito mediante esta operación se le denomina conjunto de Julia relleno, y a su frontera, simplemente conjunto de Julia. Estos conjuntos se representan mediante un algoritmo de tiempo de escape, en que cada pixel se colorea según el número de iteraciones necesarias para escapar. Suele usarse un color especial, a menudo el negro, para representar los puntos que no han escapado tras un número grande y prefijado de iteraciones.

*Ejemplos de conjuntos de Julia para  $f_c(z) = z^2 + c$*



En negro, conjunto de Julia relleno asociado a  $f_c$ ,  $c = \varphi - 2$ , ( $\varphi =$  número áureo)



Conjunto de Julia relleno asociado a  $f_c$ ,  $c = (\varphi - 2) + (\varphi - 1)i = -0.4 + 0.6i$



Conjunto de Julia relleno asociado a  $f_c$ ,  $c = -0.835 - 0.2321i$

## Familias de fractales: el conjunto de Mandelbrot.

La teoría básica sobre la iteración de funciones complejas fue desarrollada por Julia y Fatou en la década de los años 1910. La forma extraordinariamente intrincada de conjuntos relacionados con estas iteraciones se reveló en el momento en que los gráficos por ordenador fueron lo suficientemente avanzados. Las primeras imágenes del conjunto, algo burdas, de Robert Brooks y Peter Matelski, datan de 1978. Mandelbrot estudió el espacio de parámetros de polinomios cuadráticos en un artículo aparecido en 1980 y despertó el interés global por el mismo.

El estudio matemático riguroso de este conjunto realmente comenzó con el trabajo de los matemáticos Adrien Douady y John H. Hubbard, quienes demostraron muchas de sus propiedades fundamentales y nombraron el conjunto en honor de Mandelbrot. Entre otras propiedades, probaron que es un conjunto conexo y formularon la conjetura MLC, que formula la creencia de que el conjunto de Mandelbrot es localmente conexo.

El **conjunto de Mandelbrot** es el más conocido de los conjuntos fractales, y el más estudiado.

Este conjunto se define así, en el plano complejo:

Sea  $c$  un número complejo cualquiera. A partir de  $c$ , se construye una sucesión por inducción:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 && \text{(término inicial)} \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c && \text{(término de inducción)} \end{aligned}$$

Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que  $c$  pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo.

Por ejemplo, si  $c = 1$  obtenemos la sucesión  $0, 1, 2, 5, 26, \dots$  que diverge. Como no está acotada,  $1$  no es un elemento del conjunto de Mandelbrot.

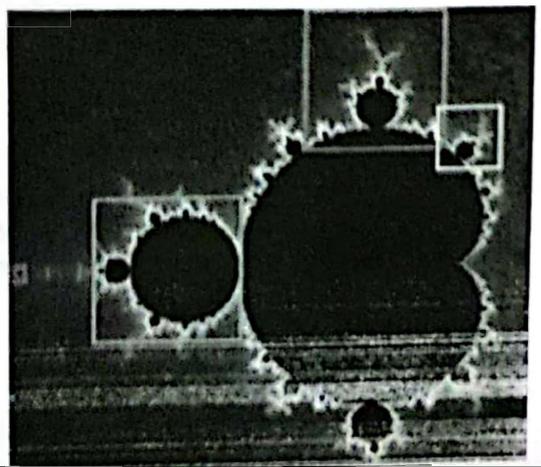
En cambio, si  $c = -1$  obtenemos la sucesión  $0, -1, 0, -1, \dots$  que sí es acotada, y por tanto,  $-1$  sí pertenece al conjunto de Mandelbrot.

A menudo se representa el conjunto mediante el **algoritmo de tiempo de escape**. En ese caso, los colores de los puntos que no pertenecen al conjunto indican la velocidad con la que diverge (tiende al infinito, en módulo) la sucesión correspondiente a dicho punto. En la imagen de ejemplo, observamos el rojo oscuro indica que al cabo de pocos cálculos se sabe que el punto no está en el conjunto mientras que el blanco informa de que se ha tardado mucho más en comprobarlo. Como no se puede calcular un sinfín de valores, es preciso poner un límite y decidir que si los  $p$  primeros términos de la sucesión están acotados entonces se considera que el punto pertenece al conjunto. Al aumentar el valor de  $p$  se mejora la precisión de la imagen.

Por otra parte, se sabe que los puntos cuya distancia al origen es superior a 2, es decir,  $x^2 + y^2 = 4$  no pertenecen al conjunto. Por lo tanto basta encontrar un solo término de la sucesión que verifique  $|z_n| > 2$  para estar seguro que  $c$  no está en el conjunto.

### Explorando la autosimilitud

Una propiedad fundamental de los fractales es la **autosimilitud** o autosemejanza: una cierta invariabilidad con relación a la escala, o dicho de otro modo, al acercarse a ciertas partes de la imagen reaparece en miniatura la imagen total. Un mismo motivo aparece a distintas escalas, a



un número infinito de escalas, como puede observarse más en detalle, a partir del plano siguiente :

Al agrandar el *cuadro verde*, se obtiene la imagen de la figura contigua, donde:

- Salta a la vista que la *bola negra a* es una reducción exacta de la *bola A*. La protuberancia a la izquierda de *a* también es una reducción exacta de *a*, y el proceso sigue indefinidamente.
- También se puede observar que la *bola b* es una reducción de *A* (una reducción combinada con una rotación, es decir que *b* se obtiene de *A* mediante una semejanza). Mirando mejor, se nota un sinfín de protuberancias semejantes a *A*.



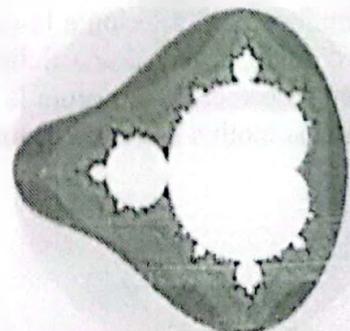
Volviendo al plano, al escoger el *cuadro azul oscuro* situado en el extremo izquierdo del plano. Al agrandarlo, se obtiene la imagen inferior izquierda :



Su parecido a la imagen inicial es obvio. El proceso se puede repetir un sinfín de veces, empezando por agrandar la pequeña mancha negra a la izquierda del cuadro. Asimismo, al observar en detalle la figura del cuadro violeta, puede apreciarse una mancha arriba a la izquierda que tiene la misma forma que la imagen inicial. Y una vez más, el parecido salta a la vista, alrededor de cada *clon* de la forma inicial existen otros clones minúsculos, en las mismas posiciones relativas que en la figura global. El proceso no tiene fin.

Otra representación :

En esta imagen, el conjunto es, naturalmente, el mismo, pero las *líneas de nivel* (que separan los colores, fuera del conjunto) no son idénticas. Esto se



debe a que no se ha empleado el mismo criterio de divergencia: en esta imagen es realmente  $|z_n| > 2$ , mientras que en las anteriores era  $|z_n| > 10$ , por razones estéticas, ya que así se obtiene una imagen inicial menos oscura.

### Relación con los conjuntos de Julia

Existe otra manera de definir este conjunto:

Es el conjunto de los complejos  $c$  para los que el conjunto de Julia asociado a  $f_c(z) = z^2 + c$  es conexo.

La familia de conjuntos de Julia  $\{f_c\}$ , asociadas a la reiteración de funciones de la forma  $f_c(z) = z^2 + c$  presenta conjuntos de una variedad sorprendente.

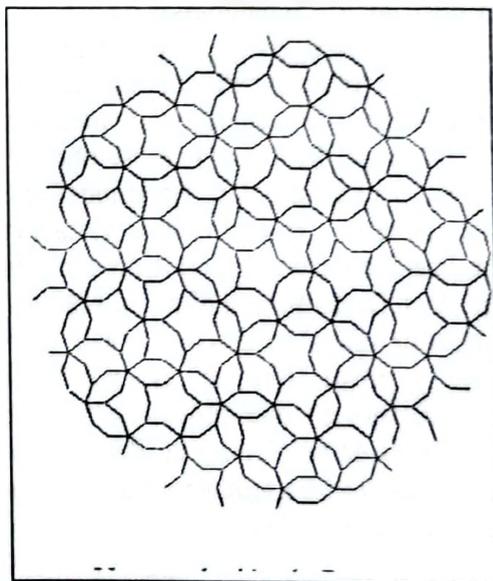
Dicha familia tendrá especial relevancia al quedar parametrizada en un mapa de fractales llamado conjunto de Mandelbrot. Este conjunto  $M$  representa un mapa en que cada pixel, correspondiente a un valor del parámetro  $c \in \mathbb{C}$ , se colorea de modo que refleje una propiedad básica del conjunto de Julia asociado a  $f_c$ . En concreto,  $c \in M$  si el conjunto de Julia asociado a  $f_c$  es conexo.

### Teselación de Penrose

Una Teselación de Penrose o suelo de baldosas de Penrose es una teselación no periódica generada por un conjunto aperiódico de baldosas prototipo nombradas después por Roger Penrose, quien investigó esos conjuntos en la década de los 70s. Debido a que todas las teselaciones obtenidas con las baldosas de Penrose no eran periódicas, las teselaciones de Penrose han sido consideradas como teselaciones aperiódicas. Entre el infinito número de posibles teselaciones hay dos que poseen eje de simetría y una simetría rotacional de orden cinco, como en el diagrama superior, y el término de Teselación de Penrose usualmente se refiere a esos.

Una teselación de Penrose tiene varias propiedades remarcables, la mayoría son notables:

- Es no periódica, lo cual significa que carece de simetría translacional alguna. Para mayor información, una copia desplazada nunca concordará con el original de forma exacta.
- Cualquier región finita en una teselación aparece un número infinito de veces en esa teselación y de hecho, en cualquier otra teselación. Esta propiedad podría ser trivialmente verdadera en una teselación con simetría translacional, pero es no trivial cuando se aplica en las teselaciones no periódicas de Penrose.
- Es un quasicristal: implementándolo como una estructura física una teselación de Penrose producirá una difracción de Bragg, el difractograma revela la simetría subyacente de orden cinco y el orden en un margen amplio. Este orden refleja el factor por el cual la teselación está organizada, no a través de simetría rotacional, pero sí a través de un proceso algunas veces llamado "deflación" o "inflación".



Robert Ammann descubrió de forma independiente la teselación al mismo tiempo que Penrose.

Varios métodos para construir las teselaciones han sido propuestos, reglas para acomodo, sustitución, corte, esquemas de proyecto y conversión.

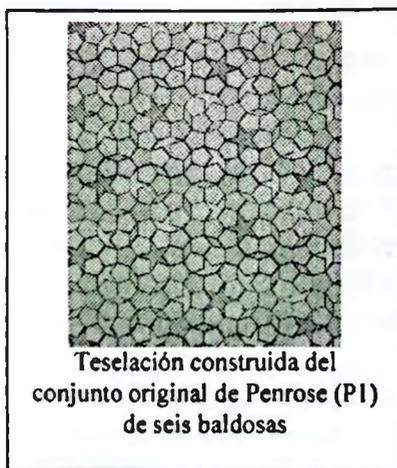
### Antecedentes

Los conjuntos de baldosas propuestos por Penrose están entre los ejemplos más simples de un hecho matemático no intuitivo, la existencia de conjuntos aperiódicos. En 1961, Hao Wang notó conexiones entre problemas de geometría (especialmente a cerca de las teselaciones) y de una cierta clase de problema de decisión.<sup>1</sup> Por un lado, él observó que si el llamado Problema Domino no fuese recursivo, entonces no tendría que existir un conjunto aperiódico de baldosas. Como la existencia de dicho conjunto parece plausible, Wang conjeturó que tal conjunto podría existir y que el Problema Dominó es recursivo para baldosas en el plano.

En su tesis de 1964, Robert Berger desmintió la conjetura de Wang, probando que el Problema Dominó es de hecho no recursivo y que producía un conjunto aperiódico de 104 baldosas distintas. (en su monografía,<sup>2</sup> Berger muestra solo un conjunto más extenso de 20426 baldosas).

El número fue reducido por Donald Knuth, Hans Läuchli y el entonces Raphael Robinson quienes dieron un conjunto aperiódico de solo seis baldosas (que simplificaron la demostración matemática de Berger) en un elegante documento de 1971.<sup>3</sup> En 1972, Roger Penrose obtiene la primera de diversas variaciones de baldosas forzando una estructura pentagonal jerárquica, un conjunto de seis baldosas. Durante algunos años siguientes, otras variaciones fueron encontradas, con la participación de Raphael Robinson, Robert Ammann y John H, Conway.

En 1981 De Bruijn explicó un método para construir las teselaciones de Penrose<sup>4</sup> por medio de cinco familias de líneas paralelas de la misma manera que un “método de corte y proyección” en el cual las baldosas de Penrose eran obtenidas con las proyecciones en dos dimensiones de una estructura cúbica de cinco dimensiones. De esta forma la teselación de Penrose es considerada como un conjunto de puntos, es decir, sus vértices, mientras que sus baldosas son solo formas geométricas definidas al conectar sus vértices.



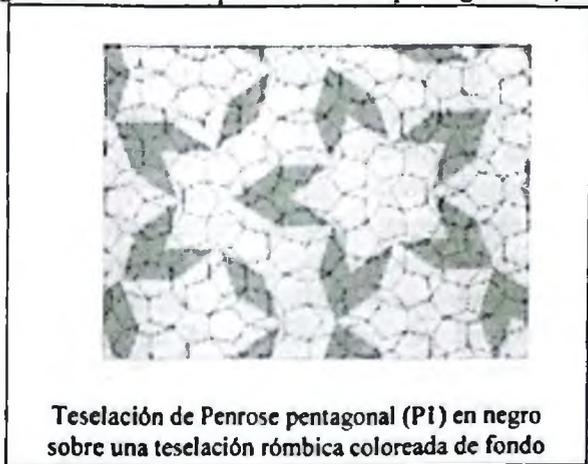
### La teselación de Penrose original (P1)

Teselación construida del conjunto original de Penrose (P1) de seis baldosas

La teselación de Penrose original fue propuesta en 1974 en un documento titulado *el papel de la estética en la investigación pura y aplicada*. No más de una quinta parte del documento trata de ello pero Penrose admite que la teselación fue el tema real. Más tarde Penrose reconoce la inspiración del trabajo de Johannes Kepler. En su libro *Harmonices Mundi* Kepler exploró teselaciones construidas por medio de pentágonos y se demostró que su construcción podía ser extendida en una teselación de Penrose. En un principio los trazos de esta idea ya estaban hechos en un trabajo de Durero.

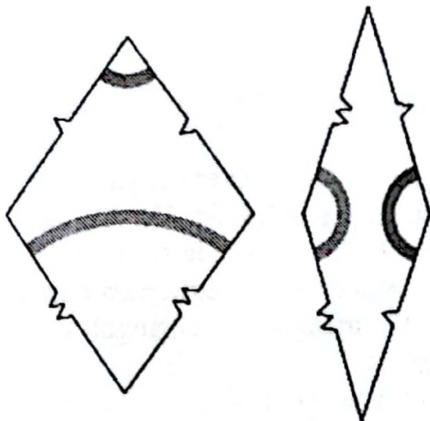
Al intentar llenar de baldosas el plano con pentágonos regulares es necesario dejar huecos. Penrose encontró una particular forma de teselado en el cual los huecos podían ser llenados con otras formas: una estrella, un bote y un diamante como se muestra a la izquierda. En adición a las baldosas, las reglas de comienzo de Penrose, usualmente llamadas *reglas de ensamble*, especifican como las baldosas deben ser unidas entre sí; estas reglas son necesarias para asegurarse de que las teselaciones sean no periódicas. Como hay tres conjuntos distintos de reglas de ensamble para baldosas pentagonales, es común considerar al conjunto como si tuviera tres baldosas pentagonales diferentes, mostradas con colores diferentes en la ilustración. Esto resulta en un conjunto de seis baldosas: un rombo delgado o 'diamante', una estrella de cinco picos, un 'bote' (aproximadamente  $\frac{3}{5}$  de una estrella) y tres pentágonos.

Penrose encontró más tarde dos conjuntos más de baldosas aperiódicas, uno consistiendo en baldosas conocidas como 'cometa' y 'flecha' (P2) y un segundo conjunto consistiendo en dos rombos (P3). La traslación entre la teselación P1 y su correspondiente teselación P3 es ilustrada a la derecha.



Teselación de Penrose pentagonal (P1) en negro sobre una teselación rómbica coloreada de fondo

### Teselación rómbica (P3)



Los rombos de Penrose son un par de rombos de lados iguales pero de formas diferentes.

Hay dos tipos de reglas de ensamble para los rombos de Penrose:

- El rombo más delgado  $t$  tiene cuatro esquinas con ángulos de 36, 144, 36 y 144 grados. El rombo  $t$  podría ser bisectado a lo largo de su diagonal menor para formar un par de triángulos de Robinson.
- El rombo grueso  $T$  tiene ángulos de 72, 108, 72 y 108 grados. El rombo  $T$  podría ser bisectado a lo largo de su diagonal mayor para formar un par de triángulos de Robinson obtusos.

Hay 54 combinaciones ordenadas cíclicamente que suman hasta  $360^\circ$  en un solo vértice, pero las reglas de la teselación solo permiten que aparezcan 7 de esas combinaciones. Las baldosas ordinarias en forma de rombo pueden ser usadas para llenar el plano de forma periódica, por lo que hay restricciones que deben de hacerse sobre como las baldosas pueden ser ensambladas. La regla más simple, prohíbe que dos baldosas de la misma naturaleza sean colocadas juntas para formar un paralelogramo simple, esto es suficiente para asegurar la aperiodicidad.<sup>7</sup> Aun así, las reglas están hechas para distinguir los lados de las baldosas y requerir que solo lados particulares puedan ser colocados juntos entre las baldosas. Un ejemplo de reglas para encajar de forma adecuada es mostrada en la parte de de arriba en el diagrama de la izquierda. La

baldosas deben ser ensambladas de manera que las curvas que cruzan sus bordes concuerden en color y posición. Una condición equivalente es que las baldosas deben ser ensambladas de tal manera que las muescas de sus bordes encajen juntos. Las mismas reglas pueden ser establecidas para otras formulaciones.

Hay una gran cantidad de patrones finitos arbitrarios con simetría de grado diez y que cuando mucho tienen un punto de centro de simetría de grado diez global donde diez ejes de simetría lo cruzan. Como la teselación es aperiódica, no hay simetría translacional, el patrón no puede ser desplazado para que coincida consigo mismo en el plano entero. Sin embargo, cualquier región delimitada, no importa cuán grande, será repetido un número infinito de veces dentro de la teselación. Por eso un finito número de patrones no pueden ser diferenciados entre las incontables teselaciones de Penrose, ni siquiera para determinar en que posición se está dentro de la baldosa que está siendo mostrada. La única manera de distinguir las dos teselaciones simétricas de Penrose de las otras es que su simetría continúe al infinito.

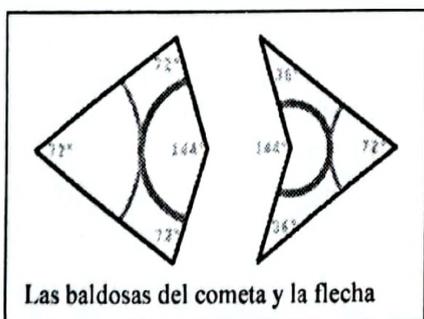
Los rombos pueden ser cortados a la mitad para formar un par de triángulos, llamados los triángulos de Robinson, los cuales pueden ser usados para producir las teselaciones de Penrose con una sustitución de baldosas. Los triángulos de Robinson son los triángulos isósceles  $36^\circ-36^\circ-108^\circ$  y  $72^\circ-72^\circ-36^\circ$ . Cada uno de estos triángulos tienen los bordes en la relación de  $(1+\sqrt{5}):2$ , la razón dorada. Las reglas que hacen cumplir la aperiodicidad en una teselación de triángulos de Robinson hacen a los triángulos asimétricos, y cada triángulo aparece en conjunción con sus reflejos para formar un rombo, un cometa o una flecha.

### Dibujando la teselación de Penrose P3

La teselación rómbica de Penrose puede ser dibujada usando el siguiente Sistema-L (sistema de Lindenmayer), que será explicado más adelante:

### Las baldosas del cometa y la flecha (P2)

Los cuadriláteros llamados el 'cometa' y la 'flecha' también son usados para formar una teselación de Penrose



- El **cometa** es un cuadrilátero cuyas cuatro esquinas tienen ángulos de 72, 72, 72 y 144 grados. El cometa puede ser bisectado a lo largo de su eje de simetría para formar un par de triángulos acutángulos de Robinson.
- La **flecha** es un cuadrilátero no convexo (cóncavo) que tiene cuatro ángulos interiores que son de 36, 72, 36 y 216

grados. La flecha puede ser bisectada a lo largo de su eje de simetría para formar un par de triángulos obtusángulos de Robinson

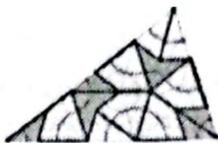
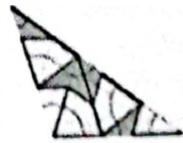
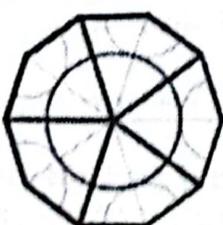
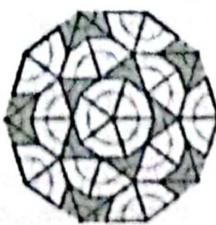
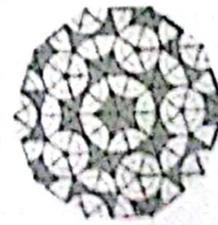
Los arcos verde y rojo en la baldosa limitan el posicionamiento de las baldosas: cuando dos baldosas comparten un borde en una teselación, los patrones deben concordar con estos bordes. Por ejemplo, el vértice cóncavo de una flecha no puede ser llenado simplemente con un cometa, pero puede ser llenado con un par de cometas.

## La deflación

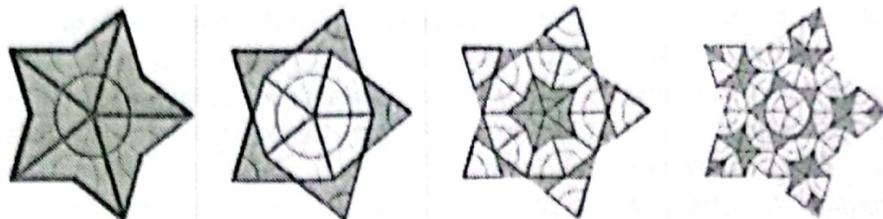
Un método de sustitución conocido como deflación se describe a continuación el cual produce un cometa y una flecha de la teselación de Penrose. Comenzando con una teselación finita llamada el axioma, la deflación procede con una secuencia de pasos llamados generaciones. El axioma puede ser tan simple como una sola baldosa. En una generación de deflación, cada baldosa es remplazada con una o más baldosas nuevas que cubren exactamente el área de la baldosa original. Las nuevas baldosas son versiones de tamaño reducido de las baldosas originales. Las reglas de sustitución garantizan que las nuevas baldosas estarán arregladas de acuerdo con las reglas de ensamble. Generaciones repetidas de la deflación producen una teselación de la forma del axioma original con baldosas cada vez más y más pequeñas. Haciendo muchas generaciones de forma suficiente, la teselación contendrá una versión de tamaño reducido del axioma que no toca el límite de la teselación. El axioma puede entonces ser rodeado por baldosas de tamaño completo correspondientes a las baldosas que aparecen en la versión de tamaño reducido. La teselación extendida puede ser usada como un nuevo axioma produciendo teselaciones más y más extensas y finalmente que cubran el plano entero.

### Un ejemplo: tres generaciones de cuatro axiomas

Este es un ejemplo de generaciones sucesivas comienzan de axiomas diferentes. En el caso del 'Sol' y la 'Estrella', la versión interior de tamaño reducido del axioma aparece en la generación 2. El 'Sol' también aparece en el interior de su generación 3.

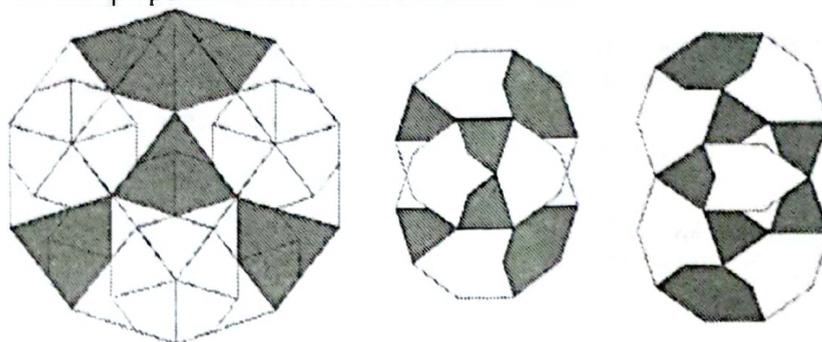
Nombre	Generación 0 (o axioma)	Generación 1	Generación 2	Generación 3
Cometa (mitad)				
Flecha (mitad)				
Sol				

Estrella



### Cubrimiento decagonal

En 1996 el matemático alemán Petra Gummell demostró que un equivalente de cubrimiento a la teselación de Penrose podría ser construida al cubrir el plano con una baldosa simple decagonal si dos tipos de superposición eran permitidos. Este nuevo enfoque se denomina 'cubrimiento' para distinguirla de la 'teselación' no superpuesta. La teselación decagonal es decorada con figuras coloreadas y la regla de cubrimiento permite solo la superposición de estas decoraciones.



Decágono de Gummelt y los dos tipos de superposición

Descomponiendo la teselación decagonal en cometas y flechas se transforma el cubrimiento aperiódico en una teselación de Penrose. Si un rombo 'T' grueso es inscrito en cada decágono, la parte de la teselación de Penrose correspondiente a esas formas es obtenida, mientras que los lugares para las teselaciones pequeñas se quedan desocupadas.

El método de cubrimiento se adopta por ser un modelo realista del crecimiento de quasícristales. Grupos atómicos diferentes 'comparten' los fragmentos de cada estructura aperiódica que es construida. La analogía con cristales construidos de una unidad de célula es construida cuando la superposición de los decágonos es vista como casi células unitarias.

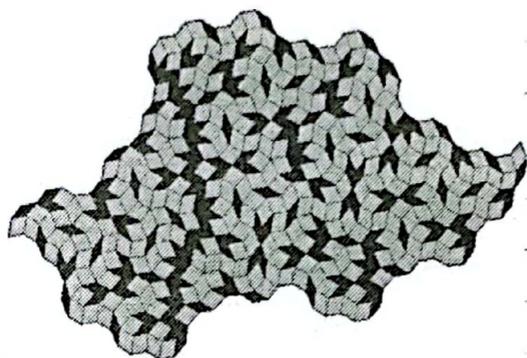
### Características de Fibonacci y la razón dorada

La teselación de Penrose, la secuencia de Fibonacci y la razón dorada están intrínsecamente relacionadas y tal vez deberían ser considerados como aspectos diferentes del mismo fenómeno.

- La relación de los rombos gruesos  $T$  con los delgados  $t$  en un teselado infinito es la razón dorada  $T/t = \varphi = 1.618..$
- Los gusanos de Conway, secuencias y rombos vecinos con lados paralelos, son apariencias que llevan la secuencia de Fibonacci de  $T$  y  $t$ , y así las barras de Ammann también provienen de grillas que llevan la secuencia de Fibonacci.

- Alrededor de cada estrella  $5T$  – se forma una espiral de Fibonacci segmentada por los lados de los rombos [1].
- La distancia entre los montículos finitos repetidos en la teselación crece con los números de Fibonacci cuando el tamaño del montículo se incrementa.
- La distribución de frecuencias de oscilación en una teselación de Penrose muestra las bandas y huecos cuyos anchos están en proporción expresada por  $\varphi$ .<sup>9</sup>
- El esquema de sustitución  $T \rightarrow 2T + t; t \rightarrow T + t$  introduce  $\varphi$  como un factor de escala, su matriz es la raíz de la matriz de sustitución de Fibonacci, implementada como una secuencia de símbolos (ejemplo,  $1 \rightarrow 101, 0 \rightarrow 10$ ) esta sustitución produce una serie de palabras cuyas longitudes son los números de Fibonacci con índice inusual,  $F(2n+1)$  para  $n=1,2,3..$ , el límite se vuelve la secuencia binaria infinita de Fibonacci.
- Los eigenvalores de la matriz de sustitución son  $\varphi+1 (= \varphi^2)$  and  $2-\varphi (= 1/\varphi^2)$ .

### Teselaciones relacionadas y tópicos



Las tres variantes de la teselación de Penrose son equivalentes en el sentido de volverse mutua y localmente derivables pero otras posibilidades, que incluyen teselaciones relacionadas no equivalentes existen. Por instancia si las reglas de ensamble para la teselación rómbica son simplificadas así como las del cometa y la flecha, una teselación binaria es obtenida.

<sup>10</sup> Su simetría subyacente es también de cinco pero no es un cuasicristal. Puede ser obtenida obtenida al 'decorar' los rombos de la teselación original con unos más pequeños o directamente por la sustitución  $T \rightarrow 3T + t, t \rightarrow T + 2t$ , pero no por un método de corte y proyección de Bruijn.

Las teselaciones de estrella-bote-hexágono y Mikulla-Roth son otras dos de las variantes más relacionadas.

El valor estético de una teselación no usual siempre ha sido apreciado y recordado en fuentes respetuosas que se interesan en estas. La propiedades que definen de forma formal las teselaciones de Penrose son típicamente omitidas cuando son usadas en el arte, ya que solo la similitud visual es observada.

La similitud con algunos patrones de decoración usados en el Medio Este han sido frecuentemente observadas y un trabajo de Lu y Steinhardt ofreció evidencia de que en una teselación de Penrose subyacen algunos ejemplos del arte islámico medieval.

El artista Clark Richert de la comunidad Drop City usó los rombos de Penrose en trabajos artísticos en 1970. En tiempos mas recientes el artista de computadora Jos Leys ha producido numerosas variaciones del tema de Penrose.

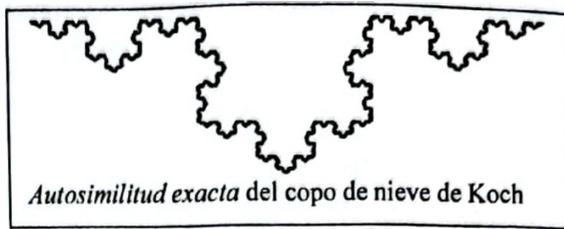
Baldosas de Penrose que cubren el piso del edificio MCS de la Universidad de Western Australia

El historiador artista Martin Kemp comentó acerca de una decoración contemporánea en la cual se usó las baldosas de Penrose y observó que Alberto Durero había esbozado montículos similares de la teselación rómbica.

## Características de un fractal

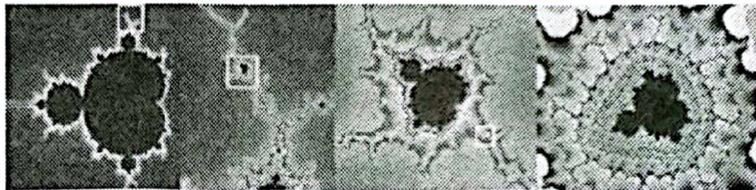
### Autosimilitud

Según B. Mandelbrot, un objeto es **autosimilar** o **autosemejante** si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas.



Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

- **Autosimilitud exacta.** este es el tipo más restrictivo de autosimilitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo la encontramos en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS).
- **Cuasiautosimilitud:** exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente D.Sullivan definió el concepto de conjunto cuasiauto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo.



Cuasiautosimilitud en el conjunto de Mandelbrot al variar la escala

- **Autosimilitud estadística.** Es el tipo más débil de autosimilitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo.

### Dimensión fractal y dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Entre los fractales podemos encontrar ejemplos como curvas que llenan todo el plano. En ese caso, la dimensión topológica de la curva, que es uno, no nos informa sobre la forma en que esta ocupa el espacio ambiente. De modo general, podríamos preguntarnos cómo densamente un conjunto ocupa el espacio métrico que lo contiene. Los números que nos informan objetivamente de este tipo de cuestiones son:

- **La dimensión fractal.** Las fórmulas que la definen tienen que ver con el recuento de las bolas necesarias para recubrir el conjunto o con el de cajas de una cuadrícula que contienen parte del conjunto, cuando las dimensiones de unas y otras tienden a cero. Podemos medir la dimensión fractal de objetos reales: líneas de la costa, nubes, árboles, etc. Con estas medidas podemos comparar objetos del mundo real con fractales generados por algoritmos matemáticos.

En geometría de fractales, la **dimensión fractal**,  $D$  es una cantidad estadística que da una idea de cuán completamente parece llenar un fractal el espacio conforme se amplía el primero hacia escalas más y más finas. Hay muchas definiciones específicas de

dimensiones fractales y ninguna debería ser tratada como universal. Desde un punto de vista teórico, las más importantes de ellas son la dimensión de Hausdorff, la dimensión de empaquetamiento y, de forma más general, las dimensiones de Rényi. Por otro lado, la dimensión de conteo de cajas y la dimensión de correlación son ampliamente usadas en la práctica, en parte por su fácil implementación.

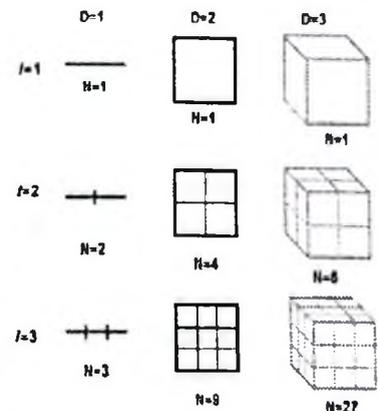
Aunque para algunos fractales clásicos todas estas dimensiones coinciden, en general no son equivalentes. Por ejemplo, la dimensión del copo de nieve de Koch tiene una dimensión topológica de uno, pero no puede ser tratada como una curva; la longitud entre cualesquiera dos puntos en el fractal es infinita. Ningún segmento del fractal tiene parecido a una línea, pero tampoco tiene parecido a una parte de un plano. En cierta forma se podría decir que es demasiado grande para poder ser considerada como un objeto unidimensional, pero es demasiado fina para ser considerada un objeto bidimensional. Esto lleva a la pregunta de si su dimensión se describe mejor con un número entre uno y dos. Ésta es una manera simple de motivar la idea de dimensión fractal.

### Definiciones

En 1919 surge una herramienta básica en la descripción y medida de estos conjuntos: la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

Hay principalmente dos formas aproximadas para generar una estructura fractal. Una es hacerla crecer a partir de un objeto y la otra es construir las divisiones subsecuentes de una estructura original como en el triángulo de Sierpinski (Fig.(2)).<sup>2</sup> En este caso se sigue la segunda aproximación para definir la dimensión de las estructuras fractales.

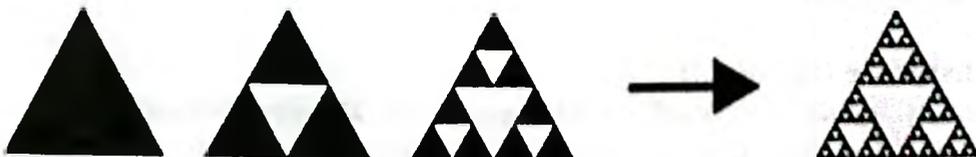
Si se toma un objeto con un tamaño lineal igual a 1 en una dimensión euclídeana  $D$ , y se reduce su tamaño por un factor de  $1/l$  en cada dirección espacial, se necesitan un número  $N = l^D$  de objetos autosimilares para cubrir el objeto original (Fig.(1)). Sin embargo, al despejar  $p$



$D$ , la dimensión definida por  $D = \frac{\log N(l)}{\log l}$  es igual todavía a su dimensión topológica o euclídeana. Aplicando la ecuación anterior a una estructura fractal, se puede obtener la dimensión de la misma (que es más o menos la dimensión de Hausdorff) como un número no entero, como se esperaba.

$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$  donde  $N(\epsilon)$  es el número de estructuras autosimilares de lado lineal  $\epsilon$  que se necesitan para cubrir toda la estructura.

Por ejemplo, la dimensión fractal para el triángulo de Sierpinski (Fig.(2)) está dado por:



$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log 2^k} = \frac{\log 3}{\log 2} \sim 1.585$$

Otras cantidades dimensionales incluyen la «dimensión de información» que considera cómo se escala la información promedio que se necesita para identificar una caja ocupada, conforme las cajas se vuelven más pequeñas:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log(P_\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}},$$

y la dimensión de correlación, quizá la más fácil de calcular,

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty} \frac{-\log(g_\epsilon / M^2)}{\log \epsilon},$$

donde  $M$  es el número de puntos utilizados para generar una representación del fractal y  $g_\epsilon$  es el número de pares de puntos que se encuentran más cercanos uno al otro que  $\epsilon$ .

### Dimensiones de Rényi

Las tres anteriores pueden verse como casos especiales de las dimensiones de Rényi de orden  $\alpha$ , definidas como:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-\alpha} \log(\sum_i p_i^\alpha)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

El numerador es la llamada entropía de Rényi de orden  $\alpha$ . La dimensión de Rényi con  $\alpha=0$  trata a todas las partes del atractor de manera similar, pero para valores más grandes de  $\alpha$  se da un mayor peso en el cálculo a las partes del atractor que son visitadas con mayor frecuencia.

Un atractor para el cual las dimensiones de Rényi no son todas iguales es conocido como un multifractal, o se dice que muestra estructura multifractal. Esto es una señal de que un comportamiento a escala diferente ocurre en diferentes partes del atractor.

### Estimación de la dimensión fractal para casos reales

Los cálculos de dimensiones fractales descritos arriba se obtienen a partir de fractales definidos formalmente. Sin embargo, ciertos fenómenos y objetos de la vida real pueden mostrar propiedades fractales, por lo que puede ser útil obtener la dimensión fractal de un conjunto de datos de una muestra. El cálculo de la dimensión fractal no se puede obtener de forma exacta sino que debe estimarse. Esto se usa en una variedad de áreas de investigación tales como la física, análisis de imagen, acústica, ceros de la función zeta de Riemann e incluso procesos electroquímicos.

Las estimaciones prácticas de las dimensiones fractales son muy sensibles al ruido numérico o experimental, y particularmente a las limitaciones en la cantidad de datos. Cualquier afirmación basada en estimaciones de dimensiones fractales deben tomarse con cuidado puesto que hay un límite superior inevitable, a menos que se presenten cantidades muy grandes de datos.

### Dimensión de Hausdorff

La dimensión de Hausdorff o dimensión de Hausdorff-Besicovich es una generalización métrica del concepto de dimensión de un espacio topológico, que

permite definir la dimensión de una dimensión fraccionaria (no-entera) para un objeto fractal.

La dimensión de Hausdorff se define como:

$$\dim_H(F) = \sup\{s: H^s(F) = \infty\} = \inf\{s: H^s(F) = 0\}$$

### Medida de Hausdorff

Contenido de Hausdorff de un conjunto: para valores de la dimensión inferiores a la dimensión de Hausdorff el contenido de Hausdorff es infinito, para valores superiores el contenido es cero. Sólo para un valor igual a la dimensión de Hausdorff el contenido es una cantidad positiva y finita.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío. El diámetro de  $U$  se define como  $|U| = \sup\{|x - y|: x, y \in U\}$ .

Sea ahora  $I$  un conjunto arbitrario de índices. La colección  $\{U_i\}_{i \in I}$  se denomina  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  si:

- $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  ; y
- $0 < |U_i| \leq \delta$  , para cada  $i \in I$  .

Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $s$  un número no-negativo. Para cualquier  $\delta > 0$  se define:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\} \quad \text{en donde el ínfimo se toma sobre todos los } \delta\text{-recubrimientos}$$

numerables de  $F$ . Es posible verificar que  $\mathcal{H}_\delta^s$  es de hecho una medida exterior en  $\mathbb{R}^n$ .

La **medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff** del conjunto  $F$  se define como el valor:  $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$

Este límite existe, sin embargo, como  $\mathcal{H}_\delta^s$  crece cuando  $\delta$  decrece, puede ser infinito.

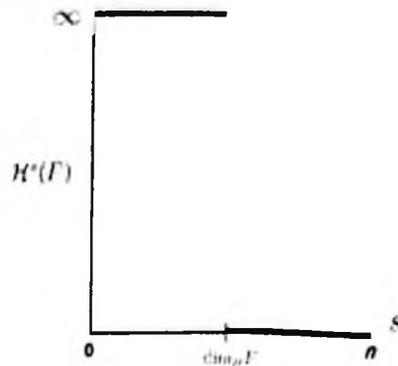
Es fácil ver que  $\mathcal{H}^s$  es una medida exterior, así que, por el Teorema de Carathéodory, la restricción de  $\mathcal{H}^s$  a los conjuntos  $\mathcal{H}^s$ -medibles es de hecho una medida, llamada **medida  $s$ -dimensional de Hausdorff**.

La medida de Hausdorff generaliza la idea de longitud, área y volumen. La medida de dimensión cero cuenta el número de puntos en un conjuntos si el conjunto es finito, o es infinita si el conjunto lo es. La medida unidimensional mide la longitud de una curva suave en  $\mathbb{R}^2$ . La medida bidimensional de un conjunto en  $\mathbb{R}^2$  es proporcional a su área y análogamente la medida tridimensional de un conjunto en  $\mathbb{R}^3$  es proporcional a su volumen.

Para todo conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  existe  $s_0 \leq n$  con la propiedad:

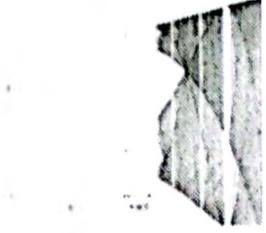
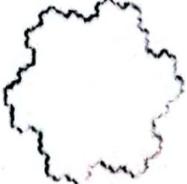
$$\mathcal{H}^s(F) \begin{cases} \infty & \text{para } s < s_0 \\ 0 & \text{para } s > s_0 \end{cases}$$

Un gráfico de  $\mathcal{H}^s$  en función de  $s$  (Ver figura) muestra que existe un valor crítico de  $s$  en el cual  $\mathcal{H}^s$  cambia súbitamente de  $\infty$  a 0.



El comportamiento de  $\mathcal{H}^s(F)$  puede explicarse de la siguiente manera: Se cubre el conjunto  $F$  con infinitos conjuntos de diámetro pequeño  $\delta \rightarrow 0$  y se calcula la suma de dichos diámetros elevados a la  $s$ -ésima potencia. Si  $s$  es pequeño, dichas potencias tienden a 1 lo cual produce que la suma diverja. Si  $s$  es grande, las  $s$ -ésimas potencias tienden a cero y la suma tiende a anularse.

## Dimensión de algunos fractales deterministas

$\delta$ (valor)	Nombre	Ilustración	Observaciones
0,4498	Bifurcación de la curva logística		En el diagrama de bifurcaciones, al aproximarnos a la zona caótica, aparece una sucesión de periodos que se van duplicando en una progresión geométrica cuya razón tiende a $1/\delta$ . ( $\delta =$ constante de Feigenbaum $= 4,6692$ ). Valor exacto: $\frac{\log(2)}{\log(\delta)}$
0,6309	Conjunto de Cantor		Se construye dividiendo cada segmento en tres y eliminando el de en medio en cada iteración. No es denso en ninguna parte y es un conjunto no numerable. Valor exacto: $\frac{\log(2)}{\log(3)}$
0,8813	Espectro del hamiltoniano de Fibonacci		El estudio del mismo demuestra la existencia de cotas superiores e inferiores para su dimensión fractal, con lo que se muestra que el espectro converge a una constante determinada. Valor exacto: $\log(1 + \sqrt{2}) / \log(1 + \sqrt{2})$
1	Conjunto de Smith-Volterra-Cantor		Construido mediante la eliminación de un intervalo central de longitud $1/2^{2n}$ de cada uno de los intervalos existentes en la $n$ -ésima iteración. No es denso en ninguna parte y tiene una medida de Lebesgue de $1/2$ .
1,0686	Contorno de la isla de Gosper		Valor exacto: $\frac{\log(6)}{\log(7)}$
1,2	Conjunto de Julia Dendrítica		Conjunto de Julia para los parámetros: Real = 0 e Imaginario = 1. Valor exacto: Medida (recuento de cajas)
1,2083	Fractal de Fibonacci (60°)		Construcción a partir de la palabra de Fibonacci. Valor exacto: $3 \frac{\log(\varphi)}{\log\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)}$

1,26 Atractor de Hénon



El atractor canónico de Hénon (con parámetros  $a = 1,4$  y  $b = 0,3$ ) tiene dimensión de Hausdorff  $\delta = 1,261 \pm 0,003$ . Distintos parámetros dan lugar a diferentes valores de  $\delta$ .

1,2619 Curva de Koch



Al yuxtaponer tres curvas de Koch se obtiene el copo de nieve (o bien el anti-copo de nieve) de Koch.

Valor exacto:  $\frac{\log(4)}{\log(3)}$

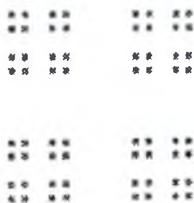
1,2619 frontera de la curva del terdragón



Sistema L: análogo a la curva del dragón con ángulo = 30°. El *Fudgeflake* se construye a partir de la yuxtaposición de tres segmentos iniciales en forma de triángulo. Valor exacto:

$\frac{\log(4)}{\log(3)}$

1,2619 Polvo de Cantor bidimensional



Conjunto de Cantor en 2D. Valor exacto:

$\frac{\log(4)}{\log(3)}$

1,2683 Conjunto de Julia  $z^2-1$



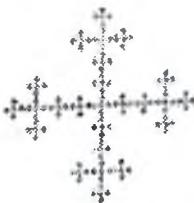
Conjunto de Julia para  $c = -1$ .<sup>3</sup> Valor exacto: calculado

1,3934 Conejo de Douady



Conjunto de Julia para  $c = -0,123 + 0,745i$ .<sup>5</sup>

1,4649 Fractal de Vicsek



Construido mediante la sustitución iterativa de un cuadrado por una cruz formada por cinco cuadrados.

Valor exacto:  $\frac{\log(5)}{\log(3)}$

1,4649 Curva cuadrática de Koch (tipo 1)



Se puede reconocer en él el patrón del fractal de Vicsek. Valor exacto:  $\frac{\log(5)}{\log(3)}$

1,5000 Curva cuadrática de Koch (tipo 2)

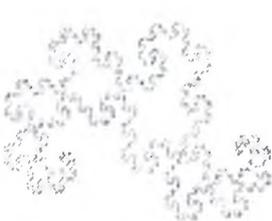


También conocido como "salchicha de Minkowski".

Valor exacto:  $\frac{\log(2)}{\log(4)}$

Cf Chang & Zhang.

1,5236 Frontera de la curva del dragón



Valor exacto:

$$\frac{\log\left(\frac{1 + \sqrt[3]{73 - 6\sqrt{87}} + \sqrt[3]{73 + 6\sqrt{87}}}{3}\right)}{\log(2)}$$

1,585 Árbol de tres ramas



Cada rama se divide en tres, en las imágenes con ángulos de 90° y 60°. La dimensión fractal del árbol es la dimensión fractal de las ramas terminales. NB: el árbol de dos ramas tiene una dimensión fractal de solo 1. Valor

exacto:  $\frac{\log(3)}{\log(2)}$

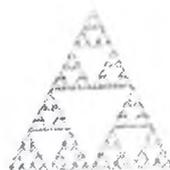
1,585 Triángulo de Sierpiński



También es el triángulo de Pascal módulo 2.

Valor exacto:  $\frac{\log(3)}{\log(2)}$

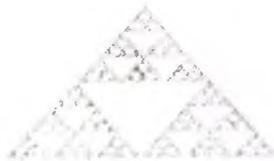
1,585 Curva de la punta de flecha de Sierpiński



Con el mismo límite que el triángulo (arriba), pero construido a partir de una curva unidimensional.

Valor exacto:  $\frac{\log(3)}{\log(2)}$

1,6309 Triángulo de Pascal módulo 3

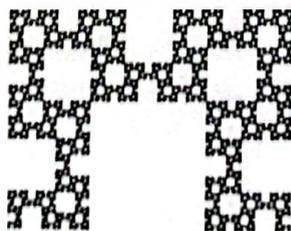


Para un triángulo módulo  $k$ , si  $k$  es primo, la

dimensión fractal es  $1 + \log_k\left(\frac{k+1}{2}\right)$  (Cf

Stephen Wolfram). Valor exacto:  $1 + \frac{\log(2)}{\log(3)}$

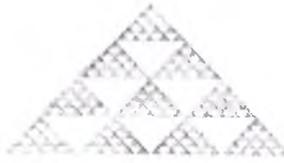
1,6379 Fractal de Fibonacci



Fractal basado en la palabra de Fibonacci (o sucesión de los conejos) Sloane A003614. Ilustración: Fractal tras 23 iteraciones (F23=28657 segmentos).

Valor exacto:  $3 \frac{\log(\phi)}{\log(1 + \sqrt{5})}$

1,6826 Triángulo de Pascal módulo 5



Para un triángulo módulo  $k$ , si  $k$  es primo, la dimensión fractal es  $1 + \log_k \left( \frac{k+1}{2} \right)$  (Cf Stephen Wolfram ). Valor exacto:  $1 + \frac{\log(3)}{\log(5)}$

1,7227 Fractal del molinete



Construido con el molinete (en inglés *pinwheel*) de Conway. Valor exacto:  $\frac{\log(4)}{\log(\sqrt{5})}$

1,7712 Hexacopo



En cada iteración se cambia cada hexágono por un copo de 7 hexágonos. Su frontera es el copo de von Koch y contiene infinitos copos de Koch (blancos y negros). Valor exacto:  $\frac{\log(7)}{\log(3)}$

1,7848 Curva de von Koch a 85°, fractal de Cesàro



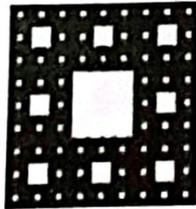
Generalización de la curva de von Koch con un ángulo  $\alpha$  de entre 0 y 90°. La dimensión fractal es entonces  $(\log(4))/(\log(2(1 + \cos(\alpha))))$ . El fractal de Cesàro se basa en este patrón. Valor exacto:  $(\log(4))/(\log(2(1 + \cos(85^\circ))))$

1,8617 Pentacopo



En cada iteración se cambia cada pentágono por un copo de 6 pentágonos.  $\varphi$  = razón áurea  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Valor exacto:  $\frac{\log(6)}{\log(1 + \varphi)}$

1,8928 Alfombra de Sierpiński



Cada una de las caras de la esponja de Menger es una alfombra de Sierpiński, como lo es la superficie inferior de la superficie de Koch cuadrática tridimensional (tipo 1). Valor exacto:  $\frac{\log(8)}{\log(9)}$

1,8928 Polvo de Cantor tridimensional



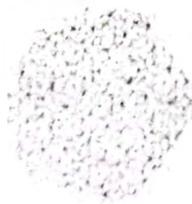
Conjunto de Cantor en tres dimensiones. Valor exacto:  $\frac{\log(8)}{\log(3)}$

1,9340 Frontera de la curva de Lévy



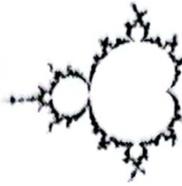
Estimado por Duvall y Keesling (1999). La propia curva tiene una dimensión fractal de 2. Valor exacto: Estimado

1,974 Teselación de Penrose



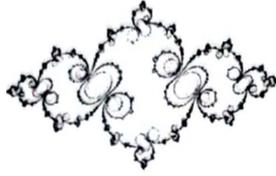
See Ramachandran, Sinha & Sanyal .

2 Frontera del conjunto de Mandelbrot



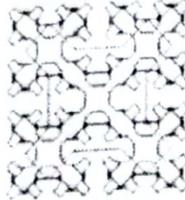
La frontera y el propio conjunto tienen la misma dimensión. Valor exacto: 2

2 Conjunto de Julia



Para determinados valores de  $c$  (incluido  $c$  perteneciente a la frontera del conjunto de Mandelbrot), el conjunto de Julia tiene una dimensión de 2. Valor exacto: 2

2 Curva de Sierpinski



Toda curva de Peano que llena el plano tiene una dimensión de Hausdorff de 2. Valor exacto: 2

2 Curva de Hilbert



Valor exacto: 2

2 Curva de Peano



Así como una familia de curvas construidas de forma similar, como las curvas de Wunderlich. Valor exacto: 2

2 Curva de Moore



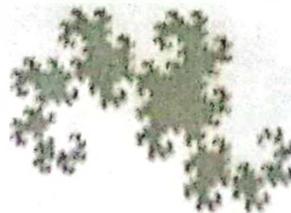
Se puede extender a 3 dimensiones. Valor exacto: 2

2 Curva de Lebesgue o de orden  $z$



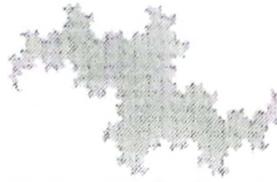
A diferencia de las anteriores, esta curva que llena el plano es diferenciable en casi todas partes. También se puede definir otro tipo en dos dimensiones. Al igual que la curva de Hilbert, se puede extender a tres dimensiones. Valor exacto: 2

2 Curva del dragón



Su frontera tiene una dimensión fractal de  $\frac{\log(2)}{\log(\sqrt{2})}$   
1,5236270862. Valor exacto:  $\log(\sqrt{2})$

2 Curva del terdragón



L-sistema:  $F \rightarrow F+F-F$ , ángulo=120°.

2 T-cuadrado



Valor exacto:  $\frac{\lg(4)}{\lg(2)}$

2 Curva de Gosper



Su frontera es la isla de Gosper.

Valor exacto:  $\frac{\lg(4)}{\lg(2)}$

2 Tetraedro de Sierpiński



Cada tetraedro se sustituye por cuatro tetraedros.

Valor exacto:  $\frac{\lg(4)}{\lg(2)}$

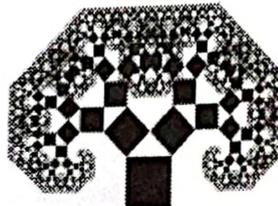
2 Fractal H



También el «árbol de Mandelbrot», que muestra un patrón similar. Valor exacto:

$\frac{\lg(4)}{\lg(2)}$

2 Árbol de Pitágoras



Cada cuadrado genera dos cuadrados con un

cociente de reducción de  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ... Valor exacto:

$\frac{\lg(2)}{\lg\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)} = 2$

2.06 Atractor de Lorenz



Para valores precisos de los parámetros.

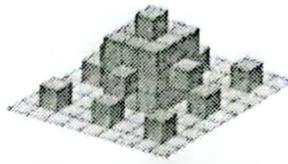
2.3296 Dodecaedro fractal



Cada dodecaedro es sustituido por 20 dodecaedros más pequeños. Valor exacto:

$\frac{\lg(20)}{\lg(2 + \varphi)}$

2,3347 Superficie cuadrática tridimensional de Koch (tipo 1)



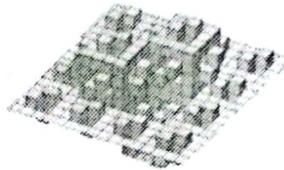
Extensión tridimensional de la curva cuadrática de Koch (tipo 1). La ilustración muestra la segunda iteración. . Valor exacto:  $\frac{\log(13)}{\log(3)}$

2.4739 Intersticios entre las esferas de Apolonio



Intersticios entre las esferas de Apolonio, equivalente tridimensional del círculo de Apolonio. Dimensión calculada por M. Borkovec, W. De Paris y R. Peikert.

2,50 Superficie cuadrática tridimensional de Koch (tipo 2)



Extensión tridimensional de la curva cuadrática de Koch (tipo 2). La ilustración muestra la segunda iteración. Valor exacto:  $\frac{\log(12)}{\log(4)}$

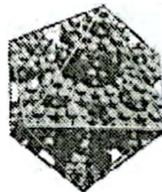
2,5237 Tesseracto de Cantor

no se puede representar

Conjunto de Cantor en cuatro dimensiones. Generalización: en un espacio de dimensión  $n$ , el conjunto de Cantor tiene una dimensión de

Hausdorff de  $n \frac{\log(2)}{\log(3)}$ . Valor exacto:  $\frac{\log(16)}{\log(3)}$

2,5819 Icosaedro fractal



Cada icosaedro es sustituido por 12 icosaedros más pequeños. Valor exacto:  $\frac{\log(12)}{\log(1 + \varphi)}$

2,5849 Cruz griega fractal en 3D



Cada segmento es sustituido por una cruz tridimensional formada por 6 segmentos.

Valor exacto:  $\frac{\log(6)}{\log(2)}$

2,5849 Octaedro fractal



Cada octaedro es sustituido por 6 octaedros más pequeños. Valor exacto:  $\frac{\log(6)}{\log(2)}$

2,5849 Superficie de Koch

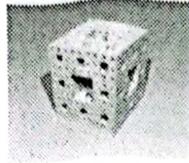


Cada triángulo equilátero es sustituido por seis triángulos equiláteros de la mitad de tamaño.

$$\frac{\log(6)}{\log(2)}$$

Valor exacto:  $\frac{\log(6)}{\log(2)}$

2,7268 Esponja de Menger



Y su superficie tiene una dimensión fractal de

$$\frac{\log(12)}{\log(3)} = 2,2618 \quad \text{Valor exacto: } \frac{\log(20)}{\log(3)}$$

3 Curva de Hilbert en 3D



Curva Hilbert extendida a 3 dimensiones.

$$\frac{\log(8)}{\log(2)}$$

Valor exacto:  $\frac{\log(8)}{\log(2)}$

3 Curva de Lebesgue en 3D



Curva de Lebesgue extendida a 3 dimensiones.

$$\frac{\log(8)}{\log(2)}$$

Valor exacto:  $\frac{\log(8)}{\log(2)}$

3 Curva de Moore en 3D



Curva de Moore extendida a 3 dimensiones.

$$\frac{\log(8)}{\log(2)}$$

Valor exacto:  $\frac{\log(8)}{\log(2)}$

## Bibliografía

- Benoit Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman & Co; ISBN 0-7167-1186-9 (September 1982).
- Bernard Sapoval, « Universalités et fractales », collection Champs, Flammarion.
- Chonat Getz and Janet Helmstedt (2004). *Graphics with Mathematica, Fractals, Julia Sets, Patterns and Natural Forms*. Elsevier
- Falconer, Kenneth (2003). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd., xxv. ISBN 0-470-84862-6.
- Gardner, Martin (1989). *Mosalcos de Penrose y escotillas cifradas*. Editorial Labor. 1990 edición. ISBN 84-335-5220-1.
- Gerald Edgar Measure, (2000). *Topology, and Fractal Geometry*, ISBN: 978-0-387-74748-4.
- Gilbert Helmborg, (2007). *Getting Acquainted with Fractals*, ISBN 978-3-11-019092-2
- Hans Sagan, (1991). *Space-Filling Curves*. Springer
- Heinz-Otto Peitgen, *The Science of Fractal Images*, Dietmar Saupe (editor), Springer Verlag, ISBN 0-387-96608-0 (August 1988)
- J. Mishra S.N. Mishra (2007). *L-System Fractals*. ISSN: 0076-5392.
- Jianbo Gao, Yinhe Cao, Wen-wen Tung, Jing Hu. (2007) *Multiscale Analysis of Complex Time Series, Integration of Chaos and Random Fractal Theory, and Beyond*. ISBN 978-0-471-65470-4
- John Briggs y F. David Peat (1989). *ESPEJO y Reflejo del Caos al ORDEN, Guía ilustrada de la teoría del caos y la ciencia de la totalidad*, ISBN: 84-7432-388-6

- Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Son Ltd; ISBN 0-471-92287-0 (March 1990)
- Michael F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Morgan Kaufmann; ISBN 0-12-079061-0
- Pachepsky Y., Crawford J.W. and Rawls W.J. (Eds.). (2000). *Fractals in Soil Science*, ISBN: 0-444-50530
- Penrose, Roger (1989). *La Nueva Mente del Emperador*, Mondadori, 1991 edición. ISBN 84-397-1786-5.
- Stephen Lynch, (2007), *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*. ISBN-13: 978-0-8176-4482-6
- [www.es.wikipedia.org](http://www.es.wikipedia.org) y sitios web diversos